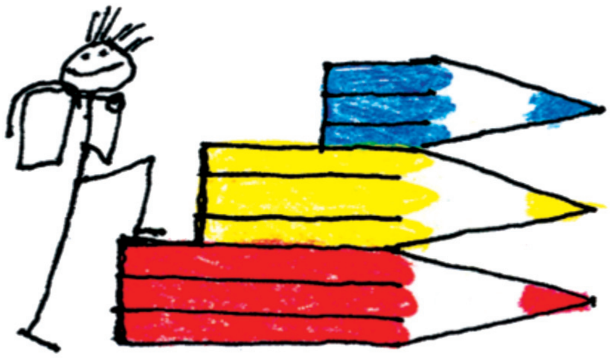
Handreichungen des Programms *SINUS an Grundschulen*

»Darstellen in der Mathematik« als Kompetenz aufbauen

Brigitte Dedekind



SINUS

an Grundschulen

Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

Mathe

Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Impressum

Brigitte Dedekind
»Darstellen in der Mathematik«
als Kompetenz aufbauen

Publikation des Programms *SINUS an Grundschulen*
Programmträger: Leibniz-Institut für die Pädagogik
der Naturwissenschaften
und Mathematik (IPN)
an der Universität Kiel
Olshausenstraße 62
24098 Kiel
www.sinus-an-grundschulen.de

Projektleitung: Prof. Dr. Olaf Köller
Projektkoordination: Dr. Claudia Fischer
Redaktion u. Realisation dieser Publikation:
Brigitte Döring, Tanja Achenbach
Kontaktadresse: info@sinus-grundschule.de

ISBN: 978-3-89088-227-7

Nutzungsbedingungen

Brigitte Dedekind

»Darstellen in der Mathematik« als Kompetenz aufbauen

1 Einleitung

Die Verwendung verschiedener Darstellungen in der Mathematik zur Begriffsbildung und -entwicklung ist unumstritten. Mit ihrer Hilfe lassen sich Sachprobleme veranschaulichen, und sie dienen – im Sinne übergreifender allgemeiner Abläufe – als strategische Hilfsmittel zur Problemlösung. Zum Erwerb der Kompetenz »Darstellen«, zu der das eigenständige Erzeugen von Darstellungen mathematischer Gegenstände und der verständige Umgang mit bereits vorhandenen Repräsentationen gehören, kann die Grundschule beitragen, indem sie ein breites Spektrum altersgemäßer Darstellungsformen erarbeitet. Durch ihre Anwendung in Form von Sprache und Zeichensystemen werden sie zum Werkzeug bei der Aufnahme, der Speicherung und dem Austausch von Informationen. Sie stehen den Lernenden zur Verfügung, um optimale Leistungen zu erreichen. Zum Aufbau dieser Kompetenz ist eine entsprechende didaktische Rahmung notwendig, für die die Lehrkraft sorgen muss. Hierbei geht es nicht um ein inhaltsunabhängiges Lehren von Methoden, sondern um die Verknüpfung von Wissenserwerb und Kompetenzaufbau. Christoph Selter ist der Meinung, dass eine systematische Hinführung zur Anwendung von Darstellungen im Unterricht der Grundschule vernachlässigt wird (Selter 2010).

Anhand der eigenen Bearbeitung der folgenden problemorientierten, realitätsbezogenen Sachaufgabe sowie einiger von Lernenden und Lehrenden angefertigten Lösungen zu diesem Aufgabenbeispiel wird deutlich, welchen Stellenwert Darstellungen in der Mathematik haben (Kapitel 2). Der Begriff des »Darstellens« wird unter Berücksichtigung der Bildungsstandards der Grundschule im Fachbereich Mathematik aufgezeigt (Kapitel 3). Die verschiedenen Darstellungsformen werden beschrieben und Vorschläge unterbreitet, wie die Kompetenz im Unterricht kumulativ aufgebaut werden kann (Kapitel 4). Lehrkräfte verwenden Darstellungen zur Begriffsbildung. Der Einsatz von Darstellungen und der Umgang mit ihnen werden erläutert (Kapitel 5). Ein Fazit rundet die Handreichung ab (Kapitel 6).

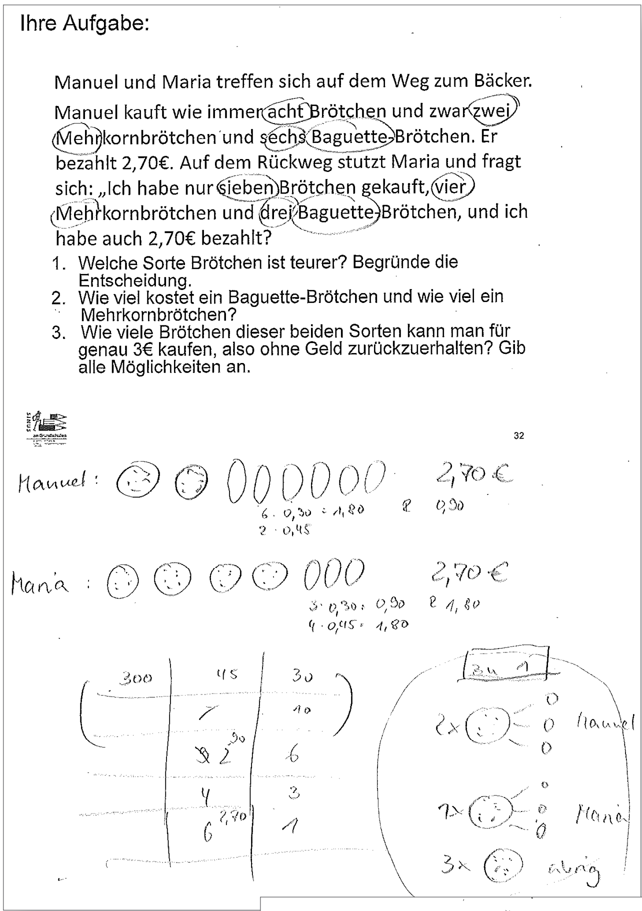
2 Aufgabenbeispiel

Manuel und Maria treffen sich auf dem Weg zum Bäcker. Manuel kauft wie immer acht Brötchen, und zwar zwei Mehrkornbrötchen und sechs Baguette-Brötchen. Er bezahlt 2,70 €. Auf dem Rückweg stutzt Maria und fragt sich: »Ich habe nur sieben Brötchen gekauft, vier Mehrkornbrötchen und drei Baguette-Brötchen, und ich habe auch 2,70 € bezahlt?«
Folgende Teilaufgaben gilt es zunächst einmal zu lösen und zu verschriftlichen:
a. Welche Sorte Brötchen ist teurer? Begründe die Entscheidung.
b. Wie viel kostet ein Baguette-Brötchen und wie viel ein Mehrkornbrötchen?
c. Wie viele Brötchen dieser beiden Sorten kann man für genau 3 € kaufen, also ohne Geld zurückzuerhalten? Gib alle Möglichkeiten an.

Aufgabe 470515 der Mathematikolympiade, 5. Klassenstufe [1]

Bei dem Beispiel handelt es sich um eine Aufgabe, deren Kontext Realitätsbezüge enthält und die anwendungsorientiert im Sinne einer Sachaufgabe verwandt wird. Auch wenn in dieser Handreichung bei der Beschreibung von Darstellungen immer wieder Bezug auf das Aufgabenbeispiel genommen wird, werden Darstellungen nicht nur in anwendungsorientierten Aufgaben verwandt. Sie werden außerdem unter dem struktur- und problemorientierten Aspekt der Mathematik herangezogen, um innermathematische Zusammenhänge zu veranschaulichen (siehe S. 14). Das Aufgabenbeispiel ist dem Bereich des funktionalen Denkens zuzuordnen, einer Kompetenz, die von der Grundschule bis zum Abitur gefordert wird. In einer proportionalen Zuordnung – einer einfachen funktionalen Beziehung – wird jedem Element einer Menge genau ein Element einer (ggf. gleichen) Menge in einem festen Verhältnis (das 2-fache, 3-fache … x-fache) zugeordnet. Funktionen werden auf unterschiedliche Weise präsentiert: Sie lassen sich sprachlich beschreiben, zeichnerisch als Skizze darstellen sowie numerisch als Tabelle, grafisch als Diagramm oder Graph und symbolisch als Term veranschaulichen.
Zur Teilaufgabe a (»Welche Sorte Brötchen ist teurer? Begründe die Entscheidung.«) könnte als Begründung neben einer sprachlich-symbolischen Argumentation ein algebraischer Term oder eine gezeichnete Darstellung als inhaltlich-anschauliche Argumentation erfolgen. Sowohl die teilnehmenden Lehrkräfte eines Workshops als auch die Schülerinnen und Schüler aus zwei vierten Klassen bearbeiteten die Teilaufgabe a wenig. In den meisten Beiträgen begründeten sie den unterschiedlichen Preis der Brötchensorten über die Preisberechnung, also über die Beantwortung der zweiten Frage (siehe Abb. 3, S. 6). Darüber hinaus wählten einige, insbesondere Lernende, eine sprachliche Formulierung ohne Begründung (siehe Abb. 4, S. 6). Eine skizzenhafte Darstellung ähnlich der in Abb. 1 war die Ausnahme. Könnte dies ein Hinweis darauf sein, dass die Aufforderung zur Begründung sowohl für Lehrende als auch Lernende bezüglich der zu verwendenden Darstellungsformen ein Problem darstellt?

1 Zu finden unter http://www.mathematik-olympiaden.de/aufgaben/47/1/A47051.pdf



Ihre Aufgabe:

Manuel und Maria treffen sich auf dem Weg zum Bäcker. Manuel kauft wie immer acht Brötchen und zwar zwei Mehrkornbrötchen und sechs Baguette-Brötchen. Er bezahlt 2,70€. Auf dem Rückweg stutzt Maria und fragt sich: „Ich habe nur sieben Brötchen gekauft, vier Mehrkornbrötchen und drei Baguette-Brötchen, und ich habe auch 2,70€ bezahlt?

1. Welche Sorte Brötchen ist teurer? Begründe die Entscheidung.
2. Wie viel kostet ein Baguette-Brötchen und wie viel ein Mehrkornbrötchen?
3. Wie viele Brötchen dieser beiden Sorten kann man für genau 3€ kaufen, also ohne Geld zurückzuerhalten? Gib alle Möglichkeiten an.

32

Manuel: 2,70 €
$6 \cdot 0{,}30 = 1{,}80$ ≙ 0,90
$2 \cdot 0{,}45$

Maria: 2,70 €
$3 \cdot 0{,}30 = 0{,}90$ ≙ 1,80
$4 \cdot 0{,}45 = 1{,}80$

300	45	30
	7	10
	~~8~~ 2	6
	4	3
	6	1

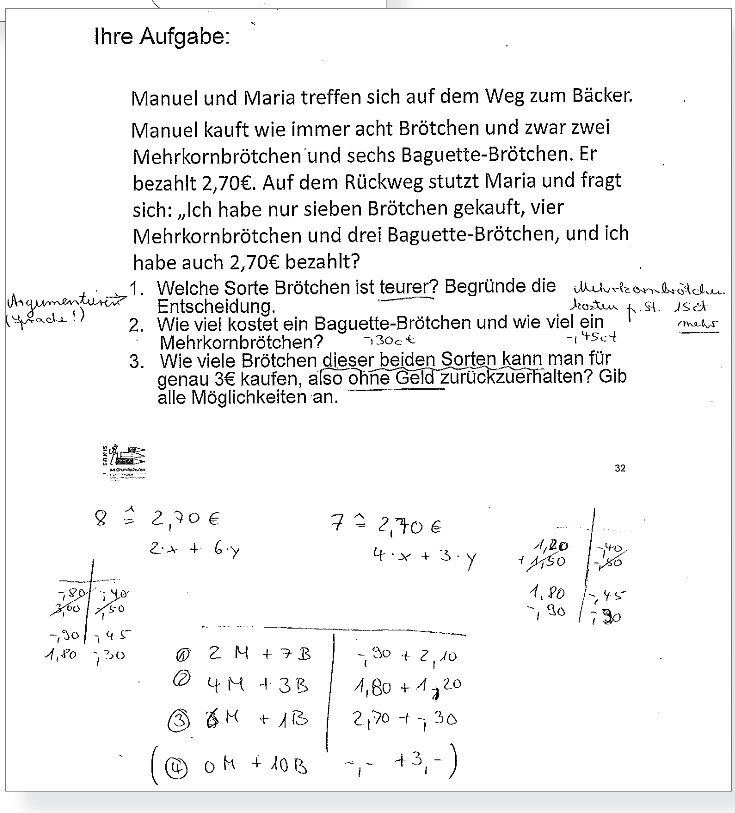
zu 1

2x Manuel

7x Maria

3x übrig

Abb. 1: Lehrerlösung 1



Ihre Aufgabe:

Manuel und Maria treffen sich auf dem Weg zum Bäcker. Manuel kauft wie immer acht Brötchen und zwar zwei Mehrkornbrötchen und sechs Baguette-Brötchen. Er bezahlt 2,70€. Auf dem Rückweg stutzt Maria und fragt sich: „Ich habe nur sieben Brötchen gekauft, vier Mehrkornbrötchen und drei Baguette-Brötchen, und ich habe auch 2,70€ bezahlt?

Argumentieren (gerade!)

1. Welche Sorte Brötchen ist teurer? Begründe die Entscheidung. Mehrkornbrötchen kosten p. St. 15 ct mehr
2. Wie viel kostet ein Baguette-Brötchen und wie viel ein Mehrkornbrötchen? -,30 ct -,45 ct
3. Wie viele Brötchen dieser beiden Sorten kann man für genau 3€ kaufen, also ohne Geld zurückzuerhalten? Gib alle Möglichkeiten an.

32

8 ≙ 2,70 €
$2 \cdot x + 6 \cdot y$

7 ≙ 2,70 €
$4 \cdot x + 3 \cdot y$

①	2 M + 7 B	-,90 + 2,10
②	4 M + 3 B	1,80 + 1,20
③	6 M + 1 B	2,70 + -,30
(④	0 M + 10 B	-,- + 3,-)

Abb. 2: Lehrerlösung 2

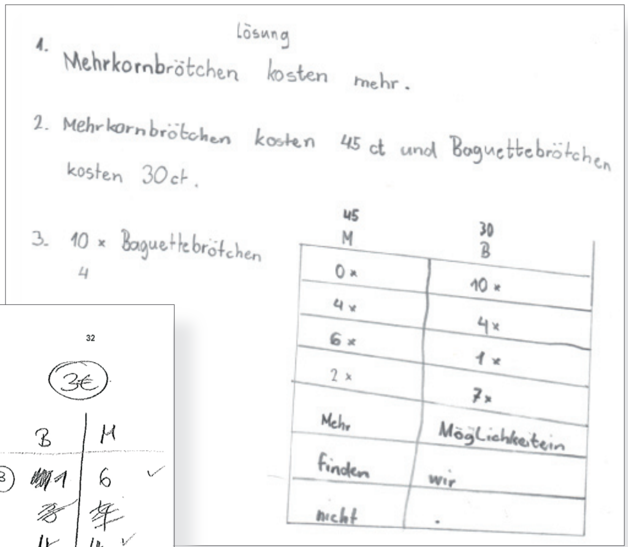
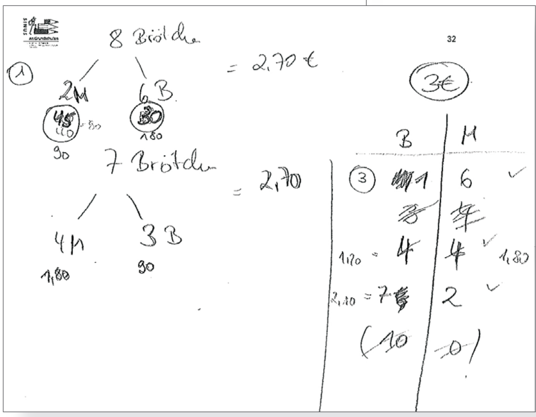


Abb. 4: Schülerlösung 1

Abb. 3: Lehrerlösung 3



Die Teilaufgabe b (»Wie viel kostet ein Baguette-Brötchen und wie viel ein Mehrkornbrötchen?«) wird sowohl von den Lehrkräften als auch von den Lernenden unter Anwendung der heuristischen Strategie des systematischen Probierens (u. a. Methode des falschen Ansatzes, operatives Prinzip; Besuden u. Henning 1999) mithilfe informativer, nachvollziehbarer Darstellungen gelöst: Ausgehend von geeigneten Startgrößen, die nachjustiert werden, gelangen sie zu den Zielgrößen. Lernende wählen gerne zur Berechnung sowohl der Teilaufgabe b als auch c die Addition (siehe Abb. 5 u. 6), während Lehrkräfte die Multiplikation bevorzugen (siehe Abb. 1, 2 u. 3).

Eine Lehrkraft (Abb. 2) bildet als Lösungsschritt zunächst zwei Gleichungen. Sie kommt zu keiner Lösung. Ihr Kommentar dazu war, dass sie nicht mehr wisse, wie eine Gleichung mit zwei Unbekannten zu lösen sei.

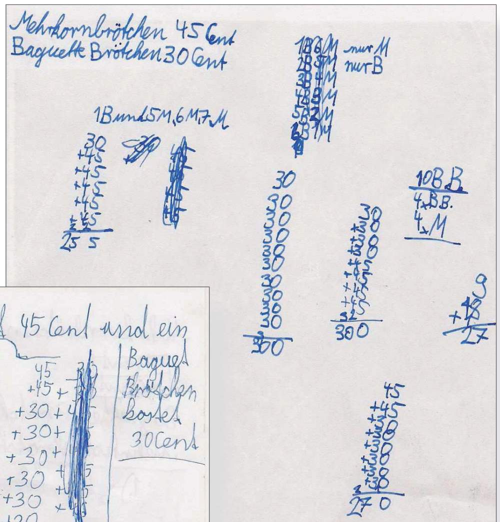
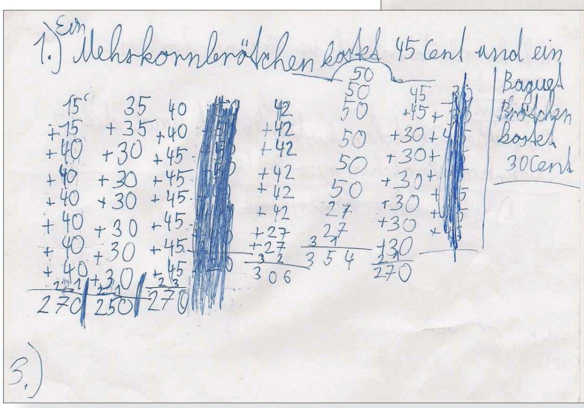


Abb. 6: Schülerlösung 3

Abb. 5: Schülerlösung 2



Zur Berechnung der Teilaufgabe c (»Wie viele Brötchen dieser beiden Sorten kann man für genau 3 € kaufen, also ohne Geld zurückzuerhalten. Gib alle Möglichkeiten an.«) verwenden Lehrkräfte und Lernende für den Lösungsprozess übersichtliche Darstellungen, z. B. in Form von Tabellen.

3 Darstellen – Begriffsklärung

In der Mathematik bezeichnet das »Darstellen« die Kompetenz, (Sach) Probleme durch Wort, Schrift, Zeichnung, Symbole oder mit Arbeitsmitteln wiederzugeben (Hahn u. Janott 2011). Dies geschieht mündlich oder schriftlich, durch sachgerechten Gebrauch von symbolischen Notationen in Form von Ziffern und Zeichen oder durch grafische Veranschaulichungen, wie z. B. Bilder, Skizzen, Tabellen und Diagramme. In der Grundschule erfolgt das Darstellen zudem durch die Verwendung von Materialien wie Steckwürfeln, Spielgeld, Punktefeldern, Wendeplättchen etc. Gemäß der Bildungsstandards sollen Grundschülerinnen und Grundschüler mithilfe der prozessbezogenen mathematischen Kompetenz »Darstellen« am Ende der vierten Klassenstufe

- für die Bearbeitung mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen
- eine Darstellung in eine andere übertragen und
- Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten (KMK 2005).

Darüber hinaus werden die Begriffe »Darstellen« und »Darstellungen« in den inhaltsbezogenen Kompetenzbeschreibungen der Bildungsstandards in fast allen Leitideen verwandt u. a.

- Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen,
- Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben,
- geometrische Figuren darstellen, einfache geometrische Abbildungen darstellen,
- Gesetzmäßigkeiten (in Mustern und Strukturen) darstellen,
- funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z. B. Menge – Preis) und entsprechende Aufgaben lösen,
- funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen und
- Daten erfassen und darstellen (KMK 2005).

Daraus folgt, dass das Darstellen ebenso wie alle weiteren allgemeinen, prozessbezogenen Kompetenzen (Problemlösen, Argumentieren, Kommunizieren und Modellieren) nur dann eine eigenständige Bedeutung erlangen, wenn sie generalisiert werden, wenn sie auch auf bislang unbekannte Inhalte angewendet werden können. Eine solche Generalisierung ist Kindern nur möglich, wenn sie sie bezogen auf ein breites inhaltliches Spektrum erlernen und nutzen (Roppelt u. Reiss 2012). Jede allgemeine, prozessbezogene Kompetenz hat ihren eigenständigen Kern. Doch lassen sie sich nicht trennscharf voneinander abgrenzen, die Übergänge sind fließend, und bei den meisten mathematischen Tätigkeiten werden mehrere prozessbezogene Kompetenzen angesprochen (Roppelt u. Reiss 2012). Dies gilt auch für das Aufgabenbeispiel, denn zu seiner Bearbeitung werden neben der Problemlösekompetenz auch die Modellierungs- und Argumentationskompetenz gefordert.

Nach Krauthausen u. Scherer (2007) wird mit dem Begriff des Darstellens jegliche Art der ›Veräußerung‹ des Denkens verbunden. Interne Repräsentationen, die in Form von verinnerlichten Handlungsabläufen, inneren Bildern oder symbolisch kodierten Konstrukten entstehen, werden in Form von ausgeführten Handlungen, produzierten Bildern, verbalen Beschreibungen oder symbolischen Zeichen extern dargestellt. Wenn mentale Vorstellungen in eine Darstellung übersetzt werden, so ist dies ein Modellierungswerkzeug, mit dessen Hilfe potenzielle Ergebnisse und Situationen zur Abwägung von Handlungsalternativen simuliert werden (Mähler u. Stern 2006). »Der Umgang mit und der Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen für dasselbe Objekt ist ein wichtiges Element mathematischen Arbeitens, das in den Bildungsstandards mit der Kompetenz Darstellen beschrieben wird« (Roppelt u. Reiss 2012, S. 38). Als Bearbeitungshilfen entfalten sie erst dann ihre Funktion, wenn sie den Lernenden als Denkobjekte zur Verfügung stehen. Daher ist jede dieser Hilfen zunächst einmal selbst Lernstoff, bevor sie als Werkzeuge genutzt werden können. Die Lernenden müssen sie kennen, müssen sie verinnerlicht haben, bevor sie sie flexibel anwenden können und ihnen die Übersetzungsleistungen zwischen den verschiedenen Repräsentationsmodi gelingen. Es ist ein Trugschluss zu glauben, dass Grundschulkinder die Kreativität besitzen, Darstellungen selbst zu entwerfen, zu entwickeln und situationsgerecht einzusetzen.

4 Phasen im Lernprozess

»Lernen heißt einen Dialog zwischen der singulären Welt eines einzelnen und der regulären Welt des Schulfaches zu führen« (Gallin u. Ruf 1998, S. 27). Die singuläre Welt des einzelnen umfasst die gesammelten Erfahrungen (u. a. die mathematischen Grundvorstellungen und individuellen Begriffsbildungen) und persönliche Ressourcen eines Menschen, die er zur Gestaltung eines Denkprozesses heranziehen kann. Da neues Wissen sich nur verankern kann, wenn es an Vorwissen anknüpft, versucht ein Mensch beim Lernen, sich einem neuen, unbekannten mathematischen Problem zu nähern, indem er zunächst auf erworbene Mittel zurückgreift. Dabei werden vielfältige Vorstellungen aktiviert, mit Erfahrungen verglichen und Analogien herstellt. Die individuellen Vorstellungen bilden in der singulären Phase – »Wie soll ICH das machen?« – den Ausgangspunkt der Auseinandersetzung mit einem mathematischen Problem. Aus dieser Vorschauperspektive (Gallin u. Ruf 1998) versucht der Lernende, sich mithilfe der ihm zur Verfügung stehenden Mittel (u. a. Sprache, Bilder, Term) dem Sachverhalt oder dem mathematischen Problem zu nähern. Dabei handelt es sich zunächst um eine individuelle Perspektive des Lernenden, der quasi in einem Zwiegespräch die Auseinandersetzung mit der Sache sucht. Diese Perspektive eröffnet Spielräume für das Verarbeiten erlebter und erzählter Erfahrungen. Darstellungen in verbaler Form (z. B. Überlegungen, Beschreibungen, Begriffe oder Regeln) oder in visueller Form (z. B. Handlungen, Skizzen) werden erzeugt. Im Dialog mit anderen Personen in der divergenten Phase – »Warum machst DU es anders?« – findet ein Austausch mit gleichgesinnten Lernenden statt. In dieser kommunikativen Phase wird mithilfe der singulären Sprache über Mathematik gesprochen. Lernende bedienen sich dabei immer mehr der mathematischen Fachsprache, der Darstellungen und Formeln. Die anschließende reguläre Phase – »Wie macht

MAN das eigentlich, oder wie wollen WIR das handhaben?« – führt zur Rückschauperspektive, die die reguläre Welt des Schulfaches präsentiert (Gallin u. Ruf 1998). Sie ist fachspezifisch, ökonomisch und effizient. Diese Perspektive wird dann eingenommen, wenn gesichertes Wissen vorliegt und in der Rückschau reflektiert wird (siehe hierzu auch Treffers 1983 und Lampert 1990), so dass eine fortschreitende Hinführung zur mathematischen Fachsprache gelingt: Wenn dem kommunikativen Austausch Raum gegeben wird, werden neue Erfahrungen und neue Begriffe auch durch Vermittlung neuer Wissensinhalte in die existierenden kognitiven Strukturen eingearbeitet und mit einer Situation in Beziehung gesetzt (Lengnink et al. 2010). Ein Mathematikunterricht, der sich darauf beschränkt, die formal mathematische Sprache zu vermitteln, überlässt die fachspezifische Bildung dem Zufall und schadet nach Meinung von Gallin u. Ruf (1998) den Lernenden. »Mathematikunterricht und außerschulische Umwelt dürfen keine voneinander isolierten Sprachräume sein« (Krauthausen 2007, S. 122).

5 Darstellungsformen als Werkzeuge nutzen

In diesem Kapitel werden die in der Grundschule anwendbaren Darstellungsformen, eingeteilt in vier Bereiche, beschrieben. Es werden Möglichkeiten aufgezeigt, wie die Kompetenz »Darstellen« im Unterricht aufgebaut werden kann.
Mithilfe von Darstellungen (u. a modellhaften Ausarbeitungen, Gleichungen, mathematischen Formeln, Graphen, Tabellen, Diagrammen) übersetzen die Lernenden Aufgabenkontexte in die mathematische Sprache. Dieser Teil des Modellierungsprozesses (Blum u. Leiss 2005) setzt voraus, dass Lernende anwendungsfähige mathematische Muster oder Strukturen beherrschen. Aus diesen können sie ein passendes Modell auswählen oder zusammensetzen. Je weniger mathematische Standardmodelle, Symbole und Verfahren den Kindern zur Verfügung stehen, umso schwieriger gestaltet sich für sie die Übertragung eines mathematischen Problems in ein adäquates mathematisches Modell (Franke u. Ruwisch 2010, S. 75).

Zurück zum Aufgabenbeispiel: Zur Lösung der Teilaufgabe b (»Wie viel kostet ein Baguette-Brötchen und wie viel ein Mehrkornbrötchen?«) wird von den Lösungssuchenden immer auf ein mathematisches Modell in Form einer Darstellung zurückgegriffen. Sie können unterschiedliche Formen annehmen:

- Einige werden eine tabellarische Darstellung heranziehen, um mit systematischem Probieren zum Ergebnis zu kommen (siehe Abb. 2 bis 4).
- Einige unterstützen ihr mathematisches Modell mit skizzenhaften Zeichnungen (Abb. 3).
- Einige berechnen die Preise formal-arithmetisch, z. B. mithilfe von Additionen (Abb. 5 u. 6).
- Wieder andere bedienen sich konkreter Bearbeitungshilfen (verschiedenfarbige Steckwürfel für die unterschiedlichen Brötchensorten, Spielgeld oder auch kopflose Streichhölzer), um die Lösung handelnd zu erarbeiten.
- Erwachsene und Lehrkräfte – nicht Grundschulkinder – können als symbolische Darstellung eine Gleichung mit zwei Unbekannten bilden.

Um ein mathematisches Modell zu konstruieren, können Lernende bekannte Rechenoperationen oder Lösungsverfahren als geeignete Werkzeuge identifizieren. Sie wenden so ein bekanntes Standardmodell an. Wenn sie in Teilaspekten des Problemlösungsprozesses Ähnlichkeiten zu bekannten Verfahren, Modellen oder Darstellungsformen erkennen und sie für die aktuelle Problemlösung anpassen, transferieren sie zuvor Gelerntes. Die kreative Anwendung gelernter mathematischer Modelle im Sinne eines »Querdenkens« wird durch die Bereitstellung herausfordernder Problemaufgaben aus einem weitgefächerten Aufgabenspektrum erreicht. Für die Problemlösung muss ausreichend Bearbeitungszeit zur Verfügung stehen. Lernende brauchen die Möglichkeit des kommunikativen Austausches, um eigene Lösungswege zu entwickeln. Eine gemeinsame Reflexion über die verschiedenen Lösungswege sollte sich zwingend anschließen. Hierbei sollen lösungsrelevante Darstellungsformen zur Anwendung kommen. Für die Lehrkraft lohnt es sich, Lösungswege zu hinterfragen, einerseits, um den Lernenden die Versprachlichung ihrer Gedanken zu ermöglichen und andererseits, um Gedankengänge der Lernenden zu verstehen und Fehlvorstellungen gemeinsam zu entdecken und zu revidieren. In dieser Phase sollten Darstellungsformen und -alternativen reflektiert werden. Damit erweitert sich das Repertoire an Darstellungswerkzeugen für die Lernenden. Die Verschriftlichung der Lösungswege hilft dabei. Gleichgültig welche Darstellungsform von Lernenden gewählt wird – häufig zeigen sich bei der Auswahl Vorlieben der Kinder. Entscheidend ist, dass sich in ihr lösungsrelevante Ansätze finden, die zur Auseinandersetzung mit der mathematischen Problemstellung führen.

5.1 Sprache als Darstellungsform

Schulisches Lernen ist im hohen Maße sprachlich vermitteltes Lernen. Sprache wird in diesem Absatz als gesprochenes oder geschriebenes Wort verstanden. Der Mathematikunterricht ist ohne den Gebrauch der Sprache nicht realisierbar. Zur Sprache im Mathematikunterricht gehört einerseits die Umgangssprache, die im Sinne von Sprachgewohnheiten und -vorerfahrungen der Kinder gesehen wird, und andererseits die Fachsprache mit Fachtermini und Sprachduktus. Sprache erfüllt im Unterricht eine doppelte Funktion: die kognitive und die kommunikative. Diese lassen sich nicht voneinander isolieren, sondern befruchten sich wechselseitig. Die kognitive Funktion der Sprache dient dem Gewinn neuer Erkenntnisse, mithilfe der kommunikativen Funktion findet die Verständigung der Lernenden untereinander und mit den Lehrenden statt. Die Kommunikation, das Miteinander-Sprechen über Mathematik, kann einerseits zu vertiefenden oder auch zu neuen Einsichten führen und andererseits zu einer zunehmend elaborierten Versprachlichung beitragen (Krauthausen 2007). So gesehen ist Sprache nicht nur als Medium für den Stoff, sondern auch für die Sicherung der (individuellen) »singulären Sprachwelten« notwendig, indem u. a. Beobachtungen, Überlegungen, Begründungen oder Einschätzungen mündlich oder schriftlich so ausgedrückt werden, dass andere sie verstehen (Selter 2004). Sprache ist dadurch gleichsam ein Mittel zur Bildung wie auch zur Darstellung eigener Vorstellungen. In der Mathematik ist sie in Form von Kontexten, Fragestellungen, Antworten, verinnerlichten, mentalen oder beschriebenen Vorstellungsbildern immer präsent. Als Grundlage des kommunikativen Austausches über Mathematik dient sie zur Beschreibung und zur Reflexion von Vorgehensweisen. Dabei werden insbesondere bei gemeinsam bearbeiteten Aufgaben mathematische Fachbegriffe und Zeichen zunehmend sachgerechter verwendet. Der Mathematikunterricht stellt in sprachlicher Hinsicht vielfältige Anforderungen an die Lernenden, aber nicht nur an sie, sondern auch an die Lehrenden. Diese müssen über eine gesicherte Sprachkompetenz verfügen und darüber hinaus die Lernenden zum Miteinander-Sprechen, zum Aushandeln von Sachargumenten herausfordern. Die Forderung an den Mathematikunterricht ist, dass Kinder von Anfang an dazu angehalten, daran gewöhnt und dabei unterstützt werden, ihre mathematischen Aktivitäten durch Sprache zu begleiten. Das ist wichtig sowohl während des Lösungsprozesses im Gespräch untereinander als auch bei der Präsentation von Lösungen. Dabei ist der Gebrauch der Fachsprache nicht zwingend. Ihr Gebrauch ist eine natürliche Folge des Verstehens und nicht umgekehrt (Krauthausen 2007).

Ausgangspunkt von Auseinandersetzungen mit Mathematik im Unterricht ist meist ein Aufgabenstimulus. Er wird in Form einer Darstellung (u. a. in Bild – als Skizze mit Punktemustern oder Würfelkonfiguration –, Text, Term, Graph, Tabelle, Modell) gegeben. Der Ausgangspunkt des oben angegebenen Aufgabenbeispiels ist ein Sachtext, der als Lernaufgabe ohne die angeführten Fragen präsentiert werden sollte. Der Kontext muss zunächst einmal erfasst werden. Kinder, bei denen der Leseprozess zu wenig automatisiert ist und die Sinnzusammenhänge erarbeiten müssen, brauchen unterstützende Maßnahmen. Die Kontextsätze müssen kurz, prägnant und eindeutig oder bewusst mehrdeutig, was eine Aushandlung von Sachargumenten erzwingt (Krauthausen 2007), formuliert werden. Sie sollen möglichst keine Nebensatzkonstruktionen, zusammengesetzte Wörter und doppelte Verneinungen enthalten. Die Situation, die im Aufgabentext angesprochen wird, sollte aus der Lebenswelt der Kinder oder aus dem unmittelbaren oder medialen Alltag stammen. Entscheidend ist, dass die Lernenden einerseits eine Vorstellung von der Situation entwickeln und andererseits ihre vorhandenen Denk- und Handlungsmuster erweitern.

Das erste Ziel nach der Präsentation des Aufgabenstimulus ist es, aus der Vorschauperspektive eine individuelle Vorstellung der Situation zu erzeugen. Eine verbale Beschreibung, eine Zeichnung, ein Rollenspiel oder ein Modellbau können dies unterstützen. Um wesentliche Fakten, Hinweise auf Rechenoperationen, wie z. B. »Signalwörter« (siehe Kapitel 5 u. 6) oder auch zu klärende Begrifflichkeiten aus den Sachtexten herauszufiltern, könnten als Darstellungen Unterstreichen, Einkreisen, farbiges Markieren und Anmerkungen (siehe Abb. 1 u. 2), den Kindern helfen, sich die Sachsituation vorzustellen. Im vorliegenden Beispiel könnten die Kinder die Situation in dem Brötchenladen, der ihnen vertraut ist, beschreiben, malen oder nachspielen. Ein Gedankenaustausch findet statt über die räumliche Gestaltung des Ladens, die Anordnung der Körbe, in denen sich die verschiedenen Brötchensorten befinden, und die Preise. Wichtig ist, dass Kinder sich selbst oder auch im Klassenverband Fragen stellen (z. B. Was sind Baguette-Brötchen?), mit deren Antworten sie immer tiefer in die Materie eindringen. Mit Fragen beginnt das Verstehen. Im kommunikativen Austausch wird die Situation immer differenzierter beschrieben, so dass die mentale Vorstellung der Situation konkreter wird. Erst wenn die Lernenden mithilfe verbaler Assoziationen, Fragen und Beschreibungen oder Darstellungen einen Zugang zum Aufgabenstimulus finden, ein »Situationsmodell« – im Sinne des Modellierungskreislaufes (Blum

u. Leiß 2006) – sich einstellt und das Sachproblem in eine Problemlandschaft eingeordnet wird, können sie Fragen zur Sachsituation formulieren, die sie unter Anwendung der Mathematik beantworten. Verinnerlichung ist mehr als die Vorstellung der konkreten Tätigkeit, sie ist das Produkt eines Abstraktionsvorganges. Durch die Formulierung von sachbezogenen mathematischen Fragen – die für die Lernenden zugleich fassbar und durch eine »Prise« Fremdheit herausfordernd sein sollten – kommt es zur Auseinandersetzung der singulären Welt des lernenden Kindes mit der regulären Welt des Unterrichtsstoffes. Das Aufgabenbeispiel fordert Fragen heraus, z. B.: Wieso zahlen sie beide 2,70 €, obschon sie nicht die gleiche Anzahl von Brötchen kaufen? Die Brötchensorten können nicht gleich teuer sein, aber welche ist jetzt teurer? Wie teuer sind die einzelnen Brötchensorten? Wie setzt sich der Preis von 2,70 € zusammen? Haben sich die Lernenden für die Beantwortung einer Frage entschieden – z. B.: Welche Sorte Brötchen ist teurer? Begründe die Entscheidung. – wird ein »Reales Modell« (Blum u. Leiß 2006) entworfen, das sich auf die Fakten konzentriert, die für die Beantwortung der Frage relevant sind. Im Prozess der Konkretisierung werden wieder Fragen gestellt, z. B.: Welche Daten aus dem Kontext muss ich beachten? Spielen der Kaufpreis und die Preise für die Brötchensorten eine Rolle? Welche Form der Darstellung erleichtert mir die Beantwortung der Frage? Welche Wörter brauche ich zur Formulierung der Begründung?
Eine Begründung in schriftsprachlicher Darstellungsform könnte lauten: Maria kauft für den gleichen Preis weniger Brötchen als Manuel. Sie kauft doppelt so viele Mehrkornbrötchen und halb so viele Baguette-Brötchen. Daraus folgt, dass die Mehrkornbrötchen teurer sein müssen. Eine Begründung zu formulieren fällt vielen Kindern, aber auch Erwachsenen schwer (siehe Ausführungen zu dem Aufgabenbeispiel). Die Vorstellung von Mathematik seitens der Lehrenden ist geprägt vom fertigen Produkt und von der Perfektion einer Mathematik »wie sie im Buche steht«, die sich der Fachsprache bedient (Gallin u. Ruf 1998). Dieses Bild prägt die Ziele, die Lehrende durch den Mathematikunterricht anstreben, und die Erwartung, die sie an die Produkte der Lernenden stellen. Der Anspruch, mathematische Begründungen korrekt zu formulieren, muss aber das Ergebnis eines kumulativ aufgebauten Lernprozesses sein.

Wie können Lernende von der singulären Sprachwelt zur regulären mathematischen Sprache gelangen? Fuß fassen müssen die Lernenden in ihrer Sprachwelt unter Verwendung der individuellen Sprachebene. Erst wenn ein Sachverhalt mithilfe des eigenen Sprachvermögens gedanklich durchdrungen ist, können Kinder sich der mathematischen Fachsprache öffnen. Andernfalls wird die mathematische Sprache zu inhaltslosen Phrasen in Form von normierten Sprechweisen und standardisierten Handlungsmustern, die die Lernenden weder durchschauen, flexibel anwenden noch zum Transfer heranziehen können. Im Klassengespräch während oder nach der Bearbeitung oder bei der Präsentation der Aufgaben sollten Fachbegriffe – auch modellhaft durch die Lehrperson – verwandt werden. Die Bedeutung von Wörtern lernt man auch durch ihren Gebrauch, eingebunden in eine konkrete, persönliche Vorstellung. Erst durch die Erfahrung der möglichen Verwendung desselben Wortes in unterschiedlichen Situationen kristallisiert sich eine abstrakte Bedeutung aus dem Gebrauchszusammenhang heraus. Das Wort löst sich so aus der singulären Welt des Lernenden und wird zum Begriff der Mathematik. Schon in der Schuleingangsphase kann der Prozess zum Gebrauch der regulären mathematischen Sprache durch viele Kommunikationsanlässe in Partner- und Gruppenarbeit sowie im Unterrichtsgespräch unterstützt werden. »Kinder, die unterschiedlich schnell auf unterschiedliche Weise lernen, bereichern sich im kooperativ-kommunikativen Austausch gegenseitig, indem die hierarchische Struktur der mathematischen Lerninhalte transparent und anschaulich wird« (Nührenbörger u. Pust 2006, S. 7). Lehrkräfte unterstützen die Verwendung und Verinnerlichung von Begrifflichkeiten der formal-mathematischen Sprache, indem sie durch wiederholten Gebrauch in Verbindung mit entsprechenden Handlungen dafür sorgen, dass sich die Sinnhaftigkeit bei den Kindern einstellt. Offen bleibt dabei, welche Begrifflichkeiten verbindlich in der Grundschule vermittelt werden sollten. Hierzu gibt es bisher keine länderübergreifende Vereinbarung, obschon in den Bildungsstandards gefordert wird, Fachbegriffe zuzuordnen und für Beschreibungen zu nutzen (z. B. Kommunizieren: »mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden«; Walther et al. 2007).

Wortspeicherübungen können als Werkzeug zur Erarbeitung fachgerechter Begriffe (Selter 2010) dienen. Ein Wortspeicher stellt eine Zusammenstellung von Wörtern als gezielte Formulierungshilfe dar, die den Lernenden die Versprachlichung eines Sachverhaltes oder einer Begründung erleichtern. Die Auswahl der dargebotenen Wörter kann aus den verbalen Rückmeldungen der Kinder gebildet oder auch von der Lehrkraft ausgearbeitet werden. Auf das Aufgabenbeispiel bezogen könnte der Wortspeicher für die Frage a (»Welche Sorte Brötchen ist teurer? Begründe die Entscheidung.«) folgendermaßen aussehen:

Wortspeicher
Das ______Brötchen ist teurer, weil ____

gleicher Preis	nicht die gleiche Anzahl von Brötchen
halb so viele	weniger
doppelt so viele	mehr

Auch zur Erarbeitung von umfangreichen, nachvollziehbaren Lösungsprotokollen und zur Einführung eines Reisetagebuches (Gallin u. Ruf 1998) können die Wortspeicherübungen herangezogen werden. Beim Reisetagebuch, auch Lerntagebuch oder Portfolio genannt, handelt es sich um eine ausführliche Verschriftlichung der Auseinandersetzung der Schülerin oder des Schülers mit einer Aufgabe, die neben der Aufzeichnung des Lösungsweges auch die Assoziationen und Fragen umfassen, die den Lösungsprozess begleiten. Für die Beantwortung der Teilaufgabe c (»Wie viele Brötchen dieser beiden Sorten kann man für genau 3 € kaufen, also ohne Geld zurückzuerhalten? Gib alle Möglichkeiten an.«) könnten die Lernenden ihre Gedanken folgendermaßen versprachlichen:

Da ein Mehrkornbrötchen 0,45 € und ein Baguette-Brötchen 0,30 € kosten, kann es sich bei der Ausgabe von genau 3 € nur um eine gerade Anzahl von Mehrkornbrötchen handeln, also zwei, vier oder sechs. Acht Brötchen sind schon zu teuer. Ich muss also den Preis dieser drei Anzahlen von Brötchen berechnen und schauen, ob und welche Anzahl von Baguette-Brötchen sich preislich zu 3 € ergänzen lässt.

Beim Schreiben laufen ähnliche Prozesse ab wie beim Sprechen, nur langsamer. Schreibend tasten sich Lernende an ein Problem heran, in dessen Mittelpunkt nicht die Lösung, sondern der Weg dorthin steht. Die sprachlichen Formen der Verschriftlichung sind als Instrument zur Selbstdarstellung und Selbstkontrolle gedacht, das von Lernenden auf der Reflexionsebene die Auseinandersetzung mit dem mathematischen Problem fordert und ihnen bewusst macht, welche Erkenntnisse sie gewonnen und welche eigenen Strategien sie entwickelt haben. Die Verschriftlichung fordert zunächst einmal die Sprach- und Darstellungskompetenz vieler Kinder heraus. Lehrkräfte sind aufgefordert, die Qualität der Schülerprodukte und Lernfortschritte zu erkennen und konstruktive Rückmeldungen an die Lernenden zu geben. Die Erarbeitung ist für beide Seiten ein langwieriger, aber für die Auseinandersetzung mit Mathematik ein lohnenswerter Prozess.

5.2 Darstellungen mithilfe didaktischer Materialien

Konkrete Materialien (u. a. Rechenrahmen, Spielgeld, Punktefelder, Plättchen, Steckwürfel, Spielfiguren) als Darstellung werden im Unterricht der Grundschule besonders im Anfangsunterricht oft eingesetzt. Der Einsatz von Materialien wird in der Grundschule immer wieder auf zwei Funktionen reduziert, und zwar auf die der Rechenhilfe und des Mittels zur Zahlendarstellung (Krauthausen u. Scherer 2007). Oft entsteht auch der Eindruck, dass konkretes Material für die Kinder zur Verfügung steht, die Schwierigkeiten in der Zahlvorstellung haben. Da sich Materialien gut für mathematische Darstellungen nutzen lassen, wäre es wünschenswert, wenn ihr Einsatz als ganz normal für den Lösungsprozess und für die Beweisführung gesehen würde. Dies gilt ebenso für den Unterricht in den weiterführenden Schulen. Mit Arbeitsmitteln lassen sich innermathematische Zusammenhänge gut veranschaulichen: Ein Beispiel hierzu sind die mit Steckwürfeln dargestellten Treppenstufen. Mit ihnen lässt sich anschaulich beweisen, dass die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen immer durch drei teilbar ist. Durch das Umsetzen eines Steckers vom höchsten Turm auf den kleinsten erhält man drei Türme mit der gleichen Anzahl von Steckwürfeln.

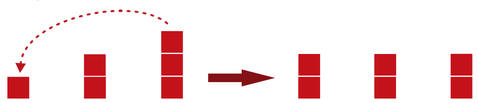


Abb. 7: Veranschaulichung: Die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen ist immer durch drei teilbar

Der mangelnde kreative Einsatz von konkreten Materialien könnte auch darauf zurückzuführen sein, dass viele Lehrkräfte diese Funktion und ihre Macht in ihrer Ausbildung nicht oder nicht hinreichend kennengelernt haben, um sie souverän zu nutzen (Krauthausen u. Scherer 2007). Beim Einsatz von Arbeitsmitteln kommt es nicht nur auf die motorische Ausführung an, sondern es müssen Teilschritte visuell antizipiert, vollzogene Handlung reflektiert und sprachlich erinnert werden. Beim Einsatz von konkreten Materialien muss das Kind Handlungen häufig vordenken und in die Vorstellung zurückholen können, da im Lösungsprozess die Ausgangslage der Arbeitsmaterialien durch Handlungen verändert wird. Die Kinder sollen erleben, dass die Mathematik in den Quantitäten und in den Handlungen mit den Quantitäten steckt und nicht in den Zeichen auf dem Papier und den algorithmischen Manipulationen mit den geschriebenen Symbolen. Deshalb hilft das Material auch nur dann, wenn die grundlegenden strukturellen Zusammenhänge der Aufgabe erfasst werden, d.h. wenn es den Kindern gelingt, in der (lebensweltlichen) Situation mathematische Strukturen zu sehen und den Transfer der beschriebenen Situation auf das zur Verfügung stehende Material zu leisten. Dann kann es als Werkzeug genutzt werden. Auf das Beispiel bezogen könnte die Teilaufgabe b (»Wie viel kostet ein Baguette-Brötchen und wie viel ein Mehrkornbrötchen?«) in folgender Form mit Arbeitsmitteln dargestellt und gelöst werden: Die 2,70 € werden durch 27 schwefellose Streichhölzer dargestellt, Streichhölzer deshalb, weil sie halbiert werden können. Ein Streichholz repräsentiert dann den Wert von 10 Cent, ein halbes Streichholz 5 Cent. Hier im Text gelingt der Streichholz-Kontext aus naheliegenden Gründen nur mit einer grafischen Darstellung: Die Lernenden versuchen nun, die Streichhölzer auf mindestens 8 Gruppen – entsprechend der Anzahl von Manuels Brötchen – gleichmäßig zu verteilen. Dann erhalten sie neun Dreiergruppen, also eine zu viel. Manuel kauft aber zwei Brötchen von der einen und sechs Brötchen von der anderen Sorte, d.h. dass er eine Dreiergruppe aufteilen muss, entweder auf sechs der acht Dreiergruppen oder auf zwei der acht Dreiergruppen. Beides ist möglich: Entweder je ein halbes Streichholz für die sechs Gruppen – dann kostet ein Baguette-Brötchen 35 Cent und das Mehrkornbrötchen 30 Cent – oder je ein und ein halbes Streichholz für zwei Dreierhaufen, dann würde ein Mehrkornbrötchen 45 Cent und ein Baguette-Brötchen 30 Cent kosten.

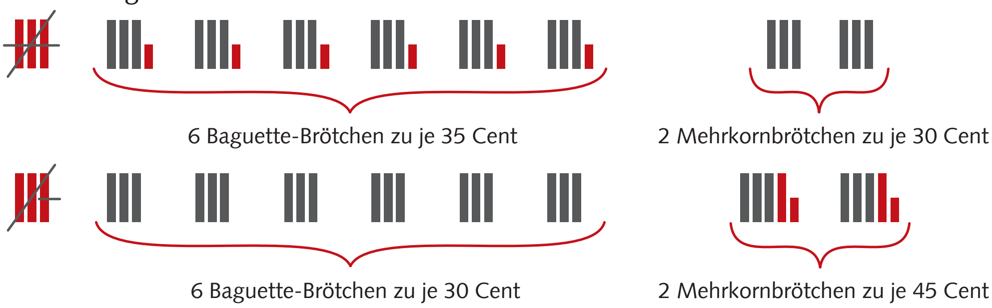


Abb. 8: Darstellung des Streichholz-Kontexts von Manuels Brötchen

Nun wird versucht, Marias Brötchen mit 27 Streichhölzern zu legen: Sie kauft sieben Brötchen und zwar vier Mehrkorn- und drei Baguette-Brötchen. Jetzt müssen zwei der neun Dreiergruppen so aufgeteilt werden, dass entweder vier Dreiergruppen einen und einen halben Streichholz erhalten – das wäre machbar –, damit ein Mehrkornbrötchen 45 Cent kostet. Oder die sechs Streichhölzer müssten auf drei Dreiergruppen aufgeteilt werden. Das hieße aber, dass ein Baguette-Brötchen dann 50 Cent kosten würde.

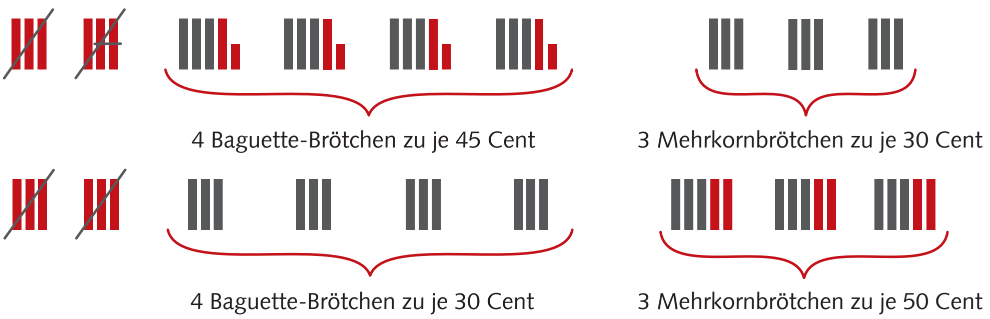
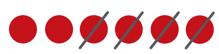


Abb. 9: Darstellung des Streichholz-Kontexts von Marias Brötchen

50 Cent für ein Mehrkornbrötchen kann für Manuels Einkauf nicht zutreffend sein, also muss die Variante richtig sein, dass ein Mehrkornbrötchen 45 Cent und ein Baguette-Brötchen 30 Cent kostet. Das Darstellen der Lösungsmöglichkeiten mit entsprechenden Materialien, erst recht unter Einsatz der heuristischen Strategie »Versuch und Irrtum«, ist wesentlich unkomplizierter, flexibler, überschaubarer, nachvollziehbarer und fehlerrevidierender als die Anfertigung einer gezeichneten oder geschriebenen Darstellung der Lösungsentwürfe. Diese Erfahrungen müssen Lernende machen, um den Sinn des Einsatzes von Arbeitsmitteln zur resultierenden Veranschaulichung zu begreifen – nicht nur als Stützfunktion zum Rechnen, sondern auch als Argumentations- und Beweismittel. Kritisch ist, wenn eine Überinterpretation und formalistische Handhabe der enaktiven Darstellungsform des E-I-S Prinzips (Brunner 1974, S. 16 ff) zum Selbstzweck wird. Dann erscheint einigen Kindern die Handlungsaufforderung entweder sinnlos, weil sie zur Lösung der Aufgabe die enaktive Darstellungsebene nicht benötigen. Oder die Umsetzung mit Arbeitsmitteln wird für Lernende zu aufwendig, so dass sie unter solchen Umständen das Rechnen mit konkretem Material verweigern und auf andere Methoden zurückgreifen, die durchaus fehleranfälliger sein können. Entscheidend ist, dass die Lehrenden den Gebrauch dieser Anschauungsmittel wertschätzen, auch indem sie selbst zur Problemlösung auf sie zurückgreifen. »Man muss es den Kindern ermöglichen, Arbeitsmittel als solche selbst auszuwählen und auch selbst zu entscheiden, wann sie sie nutzen wollen und wann nicht« (Krauthausen u. Scherer 2007, S. 255).
Mithilfe von Arbeitsmitteln lassen sich, wie bereits gesagt, Rechenoperationen veranschaulichen. Entscheidend ist, das Arbeitsmittel im darstellenden Prozess so zu verwenden, dass eine eindeutige Zuordnung des mathematischen Problems zu seinen materiellen Repräsentanten erfolgt, damit die Rechenoperation nachvollziehbar ist. Fauser (2002) beschreibt an einem Beispiel, wie die Überführung einer Vorstellung in eine handelnde Darstellung missglücken kann: In der ersten Klassenstufe sollte die Subtraktion eingeführt werden. Für Ralf bedeutete Rechnen bisher lediglich die Addition als Zunahme einer Menge von einzelnen Objekten, die mithilfe von Zahlen beschrieben wird. Mit Plättchen sollte die Aufgabe 6 – 4 dargestellt werden. Die Lehrkraft erzählte eine Geschichte, in der ein Hund vier von sechs Keksen verspeiste. Sie forderte die Kinder auf, von den sechs Plättchen, die die Kinder in der Hand hatten, vier auf den Tisch zu legen. Ralf legte die vier Plättchen auf den Tisch und behielt zwei in der Hand. Die Lehrkraft malte sechs Kreise an die Tafel und versah vier davon mit einem Strich. Darunter schrieb sie:



6 - 4 = 2

Abb. 10: Tafelbild der Minusaufgabe

Ralfs Problem war, dass für ihn die vier Plättchen, die er auf den Tisch gelegt hatte, gar nicht weg, sondern noch da waren, also vier noch übrig waren. Er konnte das Bild an der Tafel, aus dem hervorging, dass noch zwei Kekse übrig waren, nicht mit seinen Aktivitäten und mit dem visualisierten Bild auf dem Tisch – vier Plättchen liegen dort – in Einklang bringen. Um die Sachlage angemessen zu veranschaulichen, hätte der Handlungsverlauf anders gewählt werden müssen: Ausgehend von sechs auf dem Tisch liegenden Plättchen als Repräsentanten der Kekse, hätten die Kinder vier wegnehmen müssen, sodass noch zwei auf dem Tisch geblieben wären. Ralf konnte der vor-

geführten handelnden Darstellung seine individuellen Vorstellungen von der Subtraktion nicht zuordnen. Zwischen tragfähigen und nicht tragfähigen Vorstellungen kann ein breites Spektrum liegen, und der Annäherungsprozess an eine Grundvorstellung, als Bindeglied zwischen dem Individuum, den Inhalten in Repräsentationssystemen oder realen Situationen und der Mathematik, benötigt Zeit und vielfache Impulse des Interagierens, bis sie sich entwickeln oder im fortschreitenden Lernprozess neu formieren.
Eine Auswahl konkreter Materialien als Werkzeuge sollte Schülerinnen und Schülern permanent leicht zugänglich zur Verfügung stehen. Entscheidend ist, dass die Lernenden die Materialien individuell zur Problemlösung heranziehen können und zwar nicht nur als Unterstützung beim Rechnen, sondern auch bei der Problemlösung und als Argumentations- und Beweismittel. Wenn es der Lehrkraft gelingt, durch anspruchsvolle (Teil)Aufgaben – bei denen alle Kinder auf Arbeitsmittel zur Veranschaulichung zurückgreifen müssen – eine selbstverständliche, natürliche Haltung zum Einsatz von konkreten Materialen aufzubauen, dann werden diese Werkzeuge akzeptiert.

5.3 Grafische Darstellungshilfen

Grafische Darstellungen – u. a. in Form von Skizzen, Diagrammen, Tabellen – können als veranschaulichte Darstellungen von Versprachlichungen verstanden werden. Übersetzungsleistungen in beide Richtungen sind für das Verständnis von grafischen Darstellungen sehr wichtig.
Skizzen werden als grafische Darstellungshilfen zur sachgerechten Notation oder als informative Figur eingesetzt, um einen gegebenen Sachverhalt zu visualisieren und Klarheit zu schaffen. Die Umsetzung eines Textes oder auch eine durch Arbeitsmittel erhaltene Veranschaulichung in eine Skizze fördert sowohl das Lese- als auch das Problemlöseverständnis. Der Hinweis »Mach dir doch eine Skizze …« hilft aber nur begrenzt. Denn um Skizzen effektiv als Werkzeuge nutzen zu können, müssen Lernende zuvor die Kriterien für eine sinnvolle Skizze als mathematisches Modell verstanden haben, sie müssen also wissen, wann eine Skizze weiterhilft. Was unterscheidet eine Skizze von einer (Detail-)Zeichnung? Welche Gütekriterien zeichnen eine gute Skizze aus? Im Unterricht könnte dies bearbeitet werden, indem Gelegenheiten zum kommunikativen Austausch der Lernenden über unterschiedlich skizzierte Darstellungen zu ein und derselben Aufgabenstellung geschaffen werden. Eine skizzenhafte Darstellung zur Teilfrage a des Aufgabenbeispiels (»Welche Sorte Brötchen ist teurer? Begründe die Entscheidung.«) könnte folgendermaßen aussehen:

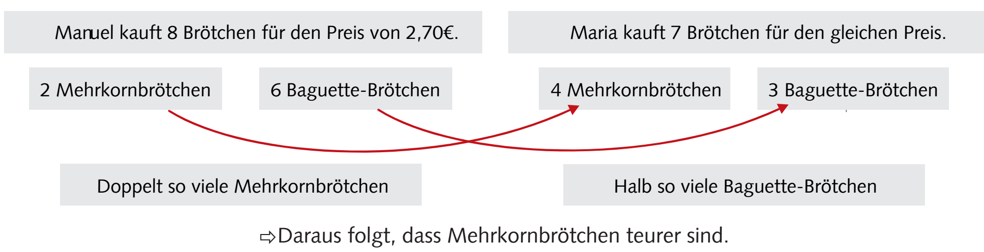


Abb. 11 : Welche Brötchensorte ist teurer?

Weitere skizzenhafte Darstellungen werden für flächige Darstellungen (Grundrisse) und für unterschiedliche Wegstrecken oder Weg-Zeit-Strecken herangezogen, z. B.: Monika benötigt für ihren Schulweg 30 Minuten. Bis zur Bushaltestelle geht sie 7 Minuten. Dann fährt sie mit dem Bus. Der Bus hält direkt vor der Schule. Sie muss nur noch 2 Minuten gehen, bis sie auf dem Schulhof ist. Wie lange muss sie mit dem Bus fahren?

Start		Ziel
Fußweg	*Busfahrt*	*Fußweg*
7min	? min	2min

Abb. 12: Weg-Zeit-Strecken zum Aufgabenbeispiel

Anders verhält es sich bei der Anfertigung maßstabsgerechter Diagramme (z. B. Pfeil-, Stab-, Balken- und Kreisdiagramm) Tabellen und Strichlisten. Sie dienen dem übersichtlichen Darstellen von Daten, Zahlen und Größen. Quantitative Unterschiede werden deutlich und können sofort abgelesen werden. Bei der heutigen Bedeutung von Datenverarbeitung sollte frühzeitig eine Grundlage für Datenkompetenz (data literacy) geschaffen werden (Krauthausen u. Scherer 2007). Im Umgang mit funktionalen Zuordnungen erweisen sich Tabellen als nützlich, denn die relationale Beziehung zwischen verschiedenen Größen wird durch die tabellarische Auflistung verdeutlicht. Für die Beantwortung der Fragen b und c des Aufgabenbeispiels eignen sich tabellarische Darstellungen (siehe Abbildungen zur Beispielaufgabe). Zur Lösung der Frage c (»Wie viele Brötchen dieser beiden Sorten kann man für genau 3 € kaufen, also ohne Geld zurückzuerhalten. Gib alle Möglichkeiten an.«) würde sich auch die Anfertigung einer Tabelle in folgender Form eignen:

Anzahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mehrkorn-brötchen (€)	0,45	**0,90**	1,35	**1,80**	2,25	**2,70**	3,15	3,60	4,05	4,50
Baguette-Brötchen (€)	**0,30**	0,60	0,90	**1,20**	1,50	1,80	**2,10**	2,40	2,50	**3,00**

Abb. 13: Tabelle zur Berechnung der Preise für die Brötchensorten

Der Lösungsgraph im Koordinatensystem als Darstellungshilfe findet bislang in der Grundschule nur sehr wenig Beachtung. Dabei lässt er sich für bestimmte proportionale Sachprobleme sehr gut anwenden. Der Graph zur Beispielaufgabe könnte folgendermaßen aussehen (siehe nächste Seite):

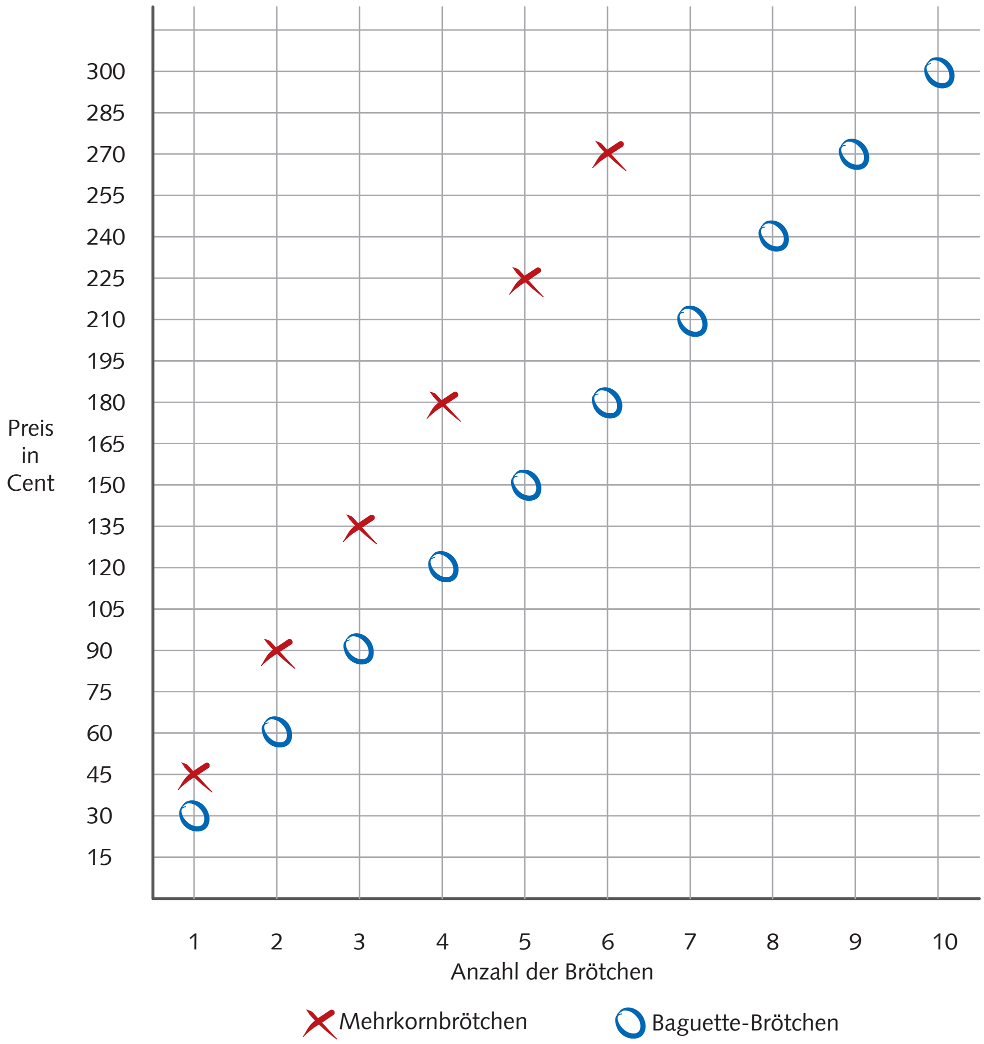


Abb. 14: Lösungsgraph im Koordinatensystem für die Berechnung der Brötchensorten

Die Entdeckungen, die Lernende anhand dieser Darstellung machen können, sind vielfältig: Welche Brötchensorte ist billiger und woran kann ich das erkennen? Wann kann man für den gleichen Geldbetrag welche Anzahl Brötchen der einen oder der anderen Sorte kaufen (vertiefende Übung zum gemeinsamen Vielfachen)? Welche Anzahl von beiden Brötchensorten kann ich für genau 3 € erhalten?

Für kombinatorische Aufgaben stellen die Baumdiagramme als Variation der Rechenbäume eine wesentliche Hilfe dar. Sie werden auch in Schulbüchern als Darstellungsform aufgegriffen. Die Aufgabe der Zusammenstellung von Kleidungsstücken (als Auswahl zwischen zwei Mützen, drei T-Shirts und zwei Hosen) kann wie folgt dargestellt werden:

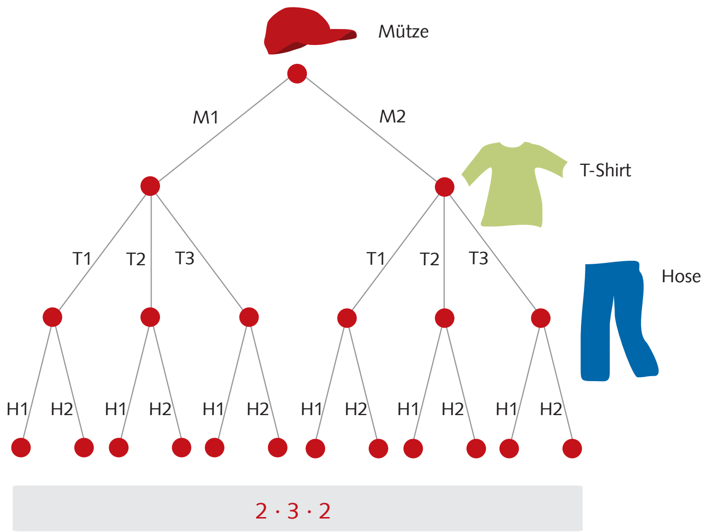


Abb. 15: Baumdiagramm zur Veranschaulichung der Anzahl von Möglichkeiten für die Zusammenstellung von Kleidungsstücken

Grafische Darstellungsformen dienen im Wissenserwerbsprozess als Werkzeug, wenn es den Lernenden gelingt, mit ihrer Hilfe die Struktur der Sachsituation nachzuvollziehen und sie lösungsunterstützend einzusetzen. Lehrkräfte neigen dazu, Kindern das Lernen möglichst zu erleichtern, indem sie ihnen ausgesuchte Anschauungsmittel oder unterstützende Hilfen in Form vorgefertigter Arbeitsblätter, mit am Text orientierten, anschaulichen grafischen Darstellungen gleich mitliefern (z. B. zur Lösung der Kombinatorikaufgabe ein Arbeitsblatt, auf der eine Person mit Mütze, T-Shirt und Hose versehen in ausreichender Vervielfältigung abgebildet ist). Schülerinnen und Schüler erhalten dann gar nicht die Chance, ihre eigenen Lösungswege zu suchen und ideenreich – auch was die Darstellungsformen angeht – tätig zu werden. Grundschulkinder sollten die Bindung an die am Text orientierten, anschaulichen grafischen Darstellungen überwinden und lernen, zunehmend mehr mathematische Modelle (z. B. Strichlisten, Diagramme, Tabellen, Graphen) zu verwenden. Sie zu erarbeiten, mehr in den Fokus zu nehmen und zu reflektieren, ist erstrebenswert. Denn die mathematische Aussagekraft von abstrakten Darstellungsformen unterstützt die Kinder dabei, die hinter dem Sachtext stehenden mathematischen Strukturen und den tieferen mathematischen Gehalt zu erkennen.

Wie könnten grafische Darstellungsformen und ihr handwerklicher Einsatz erarbeitet werden? Lehrkräfte tragen zu ihrem Aufbau bei, indem sie Aufgaben stellen, die die Anwendung bestimmter Darstellungen herausfordern. In Anlehnung an Bruders (2005) didaktische Stufung zur Implementierung der Heuristiken im Problemlöseprozess könnten in der Grundschule folgende Lernschritte in der Unterrichtspraxis durchlaufen werden:

1. Über eine von der Lehrkraft getroffene Auswahl von Darstellungen, die Lernende zur Lösung eines mathematischen Problems verwandt haben, wird reflektiert, und zwar unter dem Aspekt: »Welche der Lösungsvorschläge verstehst du am besten? Begründe deine Entscheidung«. (Anknüpfen)
2. Eine als sinnvoll ermittelte mathematische Darstellungsform wird in den Fokus gestellt und ihr Einsatz als Lösungshilfe herausgearbeitet. (Konfrontation)
3. Bei der Bearbeitung markanter Aufgabenbeispiele zum Einsatz dieser Darstellungsform lernen die Kinder, sie differenziert zu sehen und gezielt einzusetzen. (Bewusstmachen)
4. Beispielaufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad, bei denen diese Darstellungsform eine Lösungshilfe sein könnte, werden zur selbstständigen Bearbeitung bereitgestellt. (Vertiefung)
5. Entsprechende Aufgabenbeispiele aus den verschiedenen mathematischen Gebieten und der Lebenswelt der Kinder werden zur Anwendung der erarbeiteten Darstellungsform herangezogen. (Kontexterweiterung / Transfer)
6. Die erarbeiteten Darstellungsformen werden kumulativ weiterentwickelt, mit dem Ziel, dass Lernenden ein Repertoire an Lösungshilfen zu Verfügung steht, auf das sie schnell und individuell zur Problemlösung zurückgreifen können. Die Reflexion über geeignete und weniger geeignete Darstellungsformen wird weiterhin Thema des Unterrichtsgesprächs sein, damit die Präsenz der verschiedenen Darstellungsformen gesichert und ihre Einsatzmöglichkeiten abrufbar sind. (Gegenüberstellung / Elaborieren).

5.4 Symbolische Darstellungsformen

Bei der symbolischen Darstellung werden mathematische Zeichen verwendet, u. a. Ziffern, Relations- und Operationszeichen, die Vereinbarungen und Konventionen unterliegen. Mithilfe der symbolischen Repräsentation werden mathematische Zusammenhänge formal kommuniziert: Der Term $3 + 2$ ist als Hilfsmittel zum Protokollieren von quantitativen Vorstellungen, die das Kind in der Handlung zuvor bereits entwickelt haben muss, eindeutig. Erst wenn interne und externe Repräsentationen sinnvoll gebildet und aufeinander bezogen werden können, lässt sich von einem »Operationsverständnis« sprechen. Dies befähigt Lernende, eigene Vorstellungen durch Bezug auf Handlungen oder Bilder in formalisierter Darstellungsform so zu übersetzen, dass sie allgemein konsensfähig sind. Wenn das nicht der Fall ist, bleiben Ziffern und Symbole bloße Zeichen auf dem Papier, die sinnlos manipulierbar sind. Franke u. Ruwisch (2010, S. 81 ff) nennen drei Gruppierungen von Merkmalen, bei denen Kinder nicht zur problemlösenden symbolischen Darstellung der Aufgabe gelangen, weil sie sich an Oberflächenmerkmalen eines Kontextes orientieren:

- *Sie orientieren sich an den im Text vorkommenden Zahlen.* Kinder entnehmen dem Text die Zahlen der Reihe nach wie sie vorkommen und verknüpfen sie »passend«, z. B.: Kleine Zahlen deuten auf eine Multiplikation hin; eine Subtraktion wird durchgeführt; wenn erst eine große, dann eine kleine Zahl steht; ist die zweite Zahl Teiler der ersten Zahl, wird eine Divisionsaufgabe gebildet. Es werden die Operationen aus den Zahlen herausgelesen, die die Kinder beherrschen. Tatsächlich ist es so, dass diese Strategie durchaus recht erfolgreich ist, weil viele klassische Schulbuchaufgaben genauso konstruiert sind. Daher ist das Verhalten der Kinder, die die Methode anwenden, durchaus verständlich.

- *Lernende orientieren sich an Signalwörtern.* Typische Formulierungen für bestimmte Rechenoperationen werden umgesetzt. So deuten z. B. Verben wie wegnehmen, abschneiden, weggeben, verbrauchen und Adjektive wie weniger, geringer etc. auf die Subtraktion hin, während Verben wie dazunehmen, dazugeben, sammeln, gewinnen, ansteigen oder Adjektive wie mehr, länger, größer als Hinweis auf Additionen sofort gedeutet werden, obschon es Aufgabenformulierungen gibt, die trotz des Signalwortes für Addition eine Minusaufgabe verlangen. Beispiele:
  — Im Zoo gibt es 5 Tiger. Es gibt 3 Tiger mehr als es Löwen gibt. Wie viele Löwen gibt es? (Stern 2006, S. 463) *oder*
  — Am 1. April hat der Eisladen Italia 232 Kugeln Eis verkauft. Das waren 27 Kugeln mehr als im Jahr davor. Wie viele Eiskugeln waren es im Jahr davor?

  Zur Bestimmung einer unbekannten Referenzmenge, die in den Beispielen gefordert wird, muss zunächst die Umformung der Aufgabe in eine unbekannte Vergleichsmenge, bei der das Signalwort auf die Rechenoperation hinweist, erfolgen, ehe ein adäquates mentales Modell konstruiert werden kann. Auf die Beispiele bezogen hieße das:
  — Im Zoo gibt es 5 Tiger. Es gibt 3 Löwen weniger als es Tiger gibt. Wie viele Löwen gibt es? *und*
  — Am 1. April hat der Eisladen Italia 232 Kugeln Eis verkauft. Im Jahr davor waren es 27 Kugeln weniger. Wie viele Eiskugeln waren es im Jahr davor?

  Die an Oberflächenmerkmalen orientierten Lernenden hören nur das Signalwort und wenden die entsprechende Rechenoperation an. Diese Methode wird ihnen auch häufig fälschlicherweise als Hilfe vermittelt (Stern 2006, S. 463).
- *Lernende orientieren sich am unterrichtlichen Kontext.* Bei Sachtexten oder auch Päckchenrechenaufgaben, die im Anschluss an die Erarbeitung eines arithmetischen Verfahrens, einer Strategie oder auch Darstellungsform gegeben werden, wenden die Kinder das »frisch erarbeitete« Verfahren auf alle Aufgaben an. Oft reicht auch der Blick auf die Kopf- oder Fußzeile der Schulbuchseite, wo die gerade thematisierte Operation genannt wird. Wenn entsprechende Aufgaben zur Lösung gestellt werden, sind Kinder damit auch erfolgreich, obwohl sie wenig bis keine Sachrechen- oder auch Rechenkompetenz erworben haben« (Franke u. Ruwisch 2010, S. 85). Die Phase des Elaborierens findet nicht statt, in der das Neue mit bekanntem Wissen verknüpft wird.

Um den Aufbau mathematischer Begrifflichkeiten und Strukturen unabhängig von Größenrepräsentanten oder eintrainierten Fertigkeiten zu fördern, empfiehlt es sich, mit dem »Mathematischen Modell« (Blum u. Leiß 2005) zu beginnen (z. B. einer mathematischen Gleichung) und einen Teil des Modellierungskreislaufs rückwärts zu gehen. Die Lernenden erstellen zunächst ein Realmodell, entwerfen dann das Situationsmodell und formulieren den Aufgabenkontext, die reale Situation, und bilden Fragen. Hierzu gibt es folgende Aufgabenbeispiele:

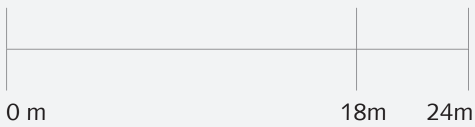
Beispiel a	*Beispiel b*
18 + ... = 24	a + b = 100 a – b = 40 es gilt: a > b

Folgende Aufforderungen erhalten die Kinder:

- Ihr könnt diese Gleichung auch mit Größen eurer Wahl (z. B. Längen, Gewichten oder Geldwerten) versehen.

18m + ...m = 24m	□ (Jahre) + ○ (Jahre) = 100 (Jahre) □ (Jahre) – ○ (Jahre) = 40 (Jahre)

- Entwickelt eine Darstellung als Lösungshilfe (Entwurf eines Realmodells).



A	90	80	**70**	60
B	10	20	**30**	40
Summe	100	100	**100**	100
Differenz	80	60	**40**	20

- Schreibt einen oder auch mehrere passende Aufgabentexte.

Monika wirft den Ball 18m weit, Jan wirft ihn 24m weit.	Ricki und Ute sind zusammen 100 Jahre alt. Ute ist 40 Jahre jünger. Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist 100, ihre Differenz 40.

- Formuliert eine passende Fragestellung.

Um wie viele Meter wirft Jan den Ball weiter als Monika?	Wie alt ist Ricki, und wie alt ist Ute? Wie heißen meine beiden Zahlen?

Die gemeinsame Betrachtung oder Präsentation der unterschiedlichen Darstellungsformen von Realmodellen, Kontexten und Fragen, die die Kinder bezogen auf das »Mathematische Modell« erarbeitet haben, helfen ihnen, die Bindung an bestimmte Erfahrungsbereiche zu überwinden und Begriffe und Strukturen zu bilden. Lernende bilden Grundvorstellungen häufig in zunächst voneinander getrennten subjektiven Erfahrungsbereichen (vgl. Bauersfeld 1983). Das heißt, eine Plusaufgabe im »Geldwertbereich« wird nicht ohne weiteres vom Kind auf eine zum »Zahlenbereich« gehörende Situation übertragen. Hierfür muss sich erst einmal ein übergeordneter Erfahrungsbereich, z. B. die Vorstellung einer »Plus-Welt« bilden, der das Erkennen und Verstehen einer gemeinsamen mathematischen Struktur der unterschiedlichen Erfahrungsbereiche sicherstellt. Kinder müssen Übersetzungsprozesse zwischen Repräsentationsebenen in den verschiedenen Erfahrungsbereichen durchführen, damit sie ein Begriffsverständnis entwickeln können. Diese kognitive Leistung wird häufig unterschätzt (Barwanietz 2008).

Da symbolische Hilfsmittel wie Formeln, Terme und Gleichungen zur Lösung von Problemaufgaben in der Grundschule noch eine untergeordnete Rolle spielen (Franke u. Ruwisch 2010, S. 69), empfiehlt es sich, den Blick verstärkt auf die inhaltlichen Relationen zu legen, um so mit den Kindern erste entscheidende Schritte zu einem arithmetischen Denken und algebraischen Verständnis mathematischer Strukturen zu gehen. Die Auseinandersetzung mit Gleichheitsrelationen bietet sich an: Vielen Kindern wird durch schematisches (Päckchen-)Rechnen vermittelt, dass hinter dem Gleichheitszeichen das Ergebnis stehen muss. Für Aufgaben wie

$$\square - 3 = 4 \text{ und } \square + 3 = 4$$

wird dann der Satz gelernt: »Wenn vorne ein ›Kästchen‹ ist, dann machst du aus einer Plusaufgabe eine Minusaufgabe und aus einer Minusaufgabe eine Plusaufgabe«. Die Umsetzung erfolgt häufig schematisch, ohne Verständnis der dahinterstehenden mathematischen Struktur. Das wird deutlich, wenn die Seiten der Gleichung vertauscht werden und nun nicht mehr vorne die Leerstelle steht, sondern hinter dem Gleichheitszeichen, oder wenn andere veränderte symbolische Darstellungsformen gewählt werden, z. B.

$$\square = 7 - 3 \qquad 4 = \square - 3 \qquad 4 = 7 - \square \qquad 2 + \square = 7 - 3$$

Erst wenn Lernende das Gleichheitszeichen als Äquivalenz und nicht als Aufforderung zum Rechnen verstehen, können sich bei arithmetischen Ausdrücken Bezüge zum relationalen Denken einstellen (vgl. Winter 1982). Mithilfe einer für die Arithmetik konzipierten Waage lässt sich die Äquivalenz anschaulich vermitteln. Für viele ist ein vereinbartes Zeichen für die Waage (beide Arme werden seitlich ausgestreckt und die Handflächen nach oben gehalten) eine Hilfe, den Fokus bei der zu bearbeitenden Aufgabe zu verändern und die beiden Seiten der Gleichung unter dem Aspekt der Äquivalenz zu betrachten. Zu einer Aufgabe wie $4 = \square - 3$ hört man häufig Sätze wie »Wenn auf der einen Seite der Wert 4 ist, muss auf der anderen Seite auch der Wert 4 herauskommen. Dann muss ich also die Zahl suchen, von der ich 3 wegnehme und 4 erhalte. Also kann ich auch 3 + 4 rechnen.«

Aufgabenformate zur Förderung des relationalen Denkens können ab der Eingangsstufe erfolgen (z. B. $18 + 2 = 19 + \square$) und zwar unter der Aufforderung »Schau dir die beiden Seiten der Gleichung an. Fällt dir etwas auf? Wie kannst du geschickt rechnen?« Jene Lernenden, die die 18 mit der 19 vergleichen und daraus Konsequenzen zur Berechnung der Leerstelle ziehen, denken relational. Wenn mit Lernenden erarbeitet wird, dass die Bezüge zwischen den Zahlen und die zugrunde liegenden mathematischen Gesetze bei der Lösung von arithmetischen Aufgaben hilfreich sein können, erleichtert man ihnen den Zugang zur Algebra.
Des Weiteren kann mit Kindern der 3. und 4. Klassenstufe mithilfe der Waage die Umformung von Gleichungen erarbeitet werden: Eine Gleichung geht in eine Gleichung über, wenn man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit gleichen Zahlen gleiche Operationen ausführt, z. B.

$$\ldots\ldots\ldots + 4 = 10$$
$$\ldots\ldots\ldots + 4 = 10 \;/ -4$$

Das bedeutet also, dass ich auf beiden Seiten 4 subtrahiere. Daraus folgt:

$$\ldots\ldots\ldots + 4 - 4 = 10 - 4.$$

Eine gute Vorbereitung für die Entwicklung des algebraischen und funktionalen Denkens – nicht der formalen Algebra (Winter 1982) – ist ein Mathematikunterricht, der das Denken schult und zwar mithilfe reichhaltiger Denkanlässe, neuen herausfordernden

Inhalten und Denkformaten, die den Lernenden die Möglichkeit bieten, Zahl- und Aufgabenbeziehungen zu entdecken, zu beschreiben, zu nutzen und ein tragfähiges Operationsverständnis zu entwickeln (Siebel u. Wittmann 2012).

6 Einsatz von Darstellungen zur Begriffsbildung

Werden Begriffe inhaltlich miteinander verbunden, entstehen Bedeutungsnetzwerke, die unterschiedlich umfangreich und strukturiert sein können. Lehrende und Lernende verwenden unter Umständen die gleichen Begriffe, doch die Netzwerke, in die sie eingebunden sind, sind unterschiedlich.
Grundlegende Vorstellungen und Begriffe können sich dann bilden, wenn Lernende sie visuell oder mental sehen und entdecken (Wartha u. Schulz 2011). »Erst in seiner wechselhaften Beziehung wird durch begriffsorientiertes Sehen etwas Gesehenes zur Anschauung für den Begriff, und umgekehrt wird der Begriff im Geschauten erst denkmöglich« (Winter 1987, S. 23) oder »Gedanken ohne Inhalt sind leer, Anschauungen ohne Begriffe sind blind« (Immanuel Kant, Kritik der reinen Vernunft). Tragfähige Vorstellungen sind entscheidend für die individuelle Begriffsbildung. Drei Phasen werden durchlaufen:

- Durch das Anknüpfen des Individuums an Bekanntes (Sach- oder Handlungszusammenhänge, sowie mathematische Repräsentationssysteme) wird der Sinn eines Begriffs konstruiert.
- Durch entsprechende (visuelle) Repräsentationen, die ein operatives Handeln auf der Vorstellungsebene zulassen, wird er aufgebaut.
- Durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellierung des Sachproblems mithilfe der mathematischen Struktur wird der Begriff anwendungsfähig.

Eine begriffliche Vorstellung ist dann tragfähig, wenn sie wesentliche mathematische Strukturen widerspiegelt, sich als flexibel und übertragbar erweist und damit als Argumentationsgrundlage für Schlussfolgerungen herangezogen werden kann. Die Ausbildung von grundlegenden Vorstellungen wird durch die Wahl der behandelten Situationen (Aufgaben) unterstützt. In der Gestaltung von Lernanlässen müssen Lehrende Schülerinnen und Schüler veranlassen, Vorstellungen zu generieren und adäquate Werkzeuge einzusetzen.
Die Lehrkraft plant Lernanlässe ausgehend von der Rückschauperspektive. Für sie bilden die regulären, mathematischen Konzepte und Zusammenhänge die Grundlage der Planung (Sachanalyse). Sie bettet sie didaktisch in eine fachlich intendierte Vorstellung ein (didaktische Rahmung) und verknüpft sie mit lebensweltlichen oder mathematischen Situationen. Ein Kind, das mit der lebensweltlichen oder mathematischen Situation als Ausgangspunkt aus der Vorschauperspektive konfrontiert wird, aktiviert seine individuellen Vorstellungen und konstruiert daraus mithilfe von Werkzeugen singuläre, mathematische Konzepte und Zusammenhänge.
Stimmt eine von der Lehrkraft geplante, fachlich intendierte, normative Vorstellung mit der des Kindes überein, können daraus Handlungsmöglichkeiten, Vorstellungsbilder, Sprechweisen und Sinnzusammenhänge entstehen und zur Entwicklung von grund-

legenden Vorstellungen genutzt werden. Das kann dann Ausgangspunkt des Lernens und Verstehens im Sinne des Entdeckens von Zusammenhängen sein (Lengnink et al. 2011). Fehlt die Übereinstimmung der normativen Vorstellung der Lehrkraft mit der individuellen Vorstellung des Kindes (siehe Beispiel Ralf: Einführung der Subtraktion), muss eine produktive Weiterarbeit mit den individuellen Vorstellungen des Kindes in zwei Richtungen erfolgen. Einerseits müssen aus den Vorstellungen der Schülerin oder des Schülers die normativ intendierten, fachlich adäquaten Vorstellungen herausgeschält werden. Andererseits muss eine – auch mathematisch gesehen – reichhaltige Vorstellungslandschaft im kommunikativen Austausch über unterschiedliche Darstellungen und korrespondierende Vorstellungen aufgebaut werden (Lengnink et al. 2011).
Wichtig ist, die Denk- und Vorstellungswelt des Kindes zu entschlüsseln und kognitive Modellierungsschwierigkeiten zu entdecken, damit sich tragbare Vorstellungen einstellen (Barwanietz 2008). Es bedarf der diagnostischen Kompetenz seitens der Lehrkraft, durch aktives Zuhören und Hinterfragen der Denkweisen des Kindes, Schaltstellen der Fehlentwicklung aufzuspüren und angemessene Unterstützungsarbeit in kognitiver und motivationaler Hinsicht zu leisten. Hierzu könnte das ausführliche Darstellen von Lösungswegen (Reisetagebücher) einen entscheidenden Beitrag leisten, denn es erfordert vom Kind, sich beim eigenen Denken zuzuschauen und Denkprozesse und Lösungsideen in eine für andere verständliche Form zu bringen. Gleichzeitig bieten die Aufzeichnungen in Verbindung mit den Gesprächen den Lehrkräften die Möglichkeit, mathematische Denkweisen der Kinder aufzuspüren und sie für die Gestaltung von Lernanlässen konstruktiv zu nutzen.

7 Fazit

Beim schulischen Lernen geht es um die Konstruktion von Bedeutungen, die das Kind durch aktives, selbsttätiges Entdecken, Rekonstruieren und Umstrukturieren des vorhandenen (mathematischen) Begriffswissens vollzieht und damit eine Veränderung der Wissensbasis erreicht (Stern 2006).
Entscheidend ist, inwieweit Lernende über Kompetenzen im Bereich der Denkstrategien verfügen, die, flexibel und transferbildend eingesetzt, ihnen beim selbstregulierten Lernen helfen. Selbstregulation beim Lernen bedeutet, in der Lage zu sein, Wissen, Fertigkeiten und Einstellungen zu entwickeln, die zukünftiges Lernen fördern und erleichtern und die vom ursprünglichen Lernkontext abstrahiert auf andere Lernsituationen – auch fächerübergreifend – übertragen werden können. Der Einsatz und die Anwendung verschiedener Strategien in der Mathematik – also auch Darstellungsformen – erfolgen nicht rezeptartig, sondern die Lernenden entscheiden, auch nach ihren Präferenzen, welche Werkzeuge sie zur Lösung eines Problems oder zur Präsentation eines Lösungsvorschlages wählen.
Aufgabe der Grundschule ist es, den Lernenden den Nutzen von Werkzeugen als bereichsspezifisch und flexibel einsetzbar zu vermitteln, ihnen die Möglichkeit zu geben, sich vielfältige Werkzeuge anzueignen und deren Gebrauch zu routinisieren. Die mathematische Grundbildung für Schülerinnen und Schüler hängt also wesentlich davon ab, in welchem Maße im Unterricht Wissenserwerb und der Aufbau der prozessbezogenen Kompetenzen miteinander verknüpft werden. Der heutige Mathematikunterricht för-

dert durch das aktiv-entdeckende Lernen »die Fähigkeit zum produktiven (einfallsreichen) Denken« und »das kritische Vermögen als sichere Instanz« (Wagenschein, in: Büchter u. Leuders 2005, S. 116), indem individuelle Lernprozesse mit Aha-Erlebnissen, Vorgriffen, Sprüngen, Brüchen, Stillständen und Rückschlägen ermöglicht werden (Wittmann, in: Büchter u. Leuders 2005, S.116).
Für die Lehrenden besteht die Herausforderung einerseits in der Bereitstellung motivierender, herausfordernder und kompetenzerweiternder Problemstellungen und anderseits in der Bereitschaft, Lernenden die Auseinandersetzung im kommunikativen Austausch während des Lösungsprozesses zu ermöglichen und die Ergebnisse gemeinsam zu reflektieren.

Literatur

Barwanietz, T. (2008). Mathematische Modellbildung. Alltagsnahe oder abstrakt-symbolische Handlungsorientierung im Mathematikunterricht der Grundschule? In: Zeitschrift für Grundschulforschung, Heft 1, S. 83-93.

Besuden, H., Henning, H. (1999). Operativer Umgang mit Sachaufgaben. Mathematische Unterrichtspraxis, Heft II, S. 3-12.

Blum, W., Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der »Tanken«-Aufgabe. In: Mathematik lehren, (2005) Heft 128, S. 18-21.

Bruder, R. (2005). Problemlösen lernen für alle. Download unter http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienIPN/Bruder.pdf [Zugriff am 12.11.2011]

Bauersfeld, H. (1983) (Hrsg. mit H. Bussmann, G. Krummheuer u. a.). Lehren und Lernen von Mathematik. Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Band 6. Köln: Aulis Verlag Deubner.

Büchter. A., Leuders, T. (2005). Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Berlin: Cornelsen.

Fauser, P. (o.J.). Lernen und Verstehen. Thesen zum pädagogischen Kerngeschäft. Download unter http://www.eule-thueringen.de/publikationen/grundlagen/download/vortragfauser.pdf [Zugriff am 12.11.2011]

Franke, M., Ruwisch, S. (2010). Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Heidelberg: Spektrum.

Gallin, P., Ruf, U. (1998). Sprache und Mathematik in der Schule. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Hahn, H., Janott, S. (2011). Förderung der mathematischen Kompetenz des Darstellens. In: Grundschulunterricht Mathematik, Heft 2 / 2011, S. 15-17.

Kant, I. (1787). Kritik der reinen Vernunft. 2. Auflage von 1990, Kap. 22. Hamburg: Felix Meiner Verlag

KMK (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2005). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). München, Neuwied: Wolters Kluwer Deutschland GmbH. Download unter
http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf [Zugriff am 12.11.2011]

Krauthausen, G. (2007). Sprache und sprachliche Anforderungen im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Schöler, H., Welling, A. (Hrsg.). Sonderpädagogik der Sprache, Band 1. Göttingen: Hogrefe.

Krauthausen, G., Scherer, P. (2007). Einführung in die Mathematikdidaktik. München: Spektrum.

Lampert, M. (1990). Connecting inventions with connections. In: Steffe, L., Wood, T.: Transforming Children`s Mathematics Education. S. 253-265. Hillsdale / New Jersey: Erlbaum.

Lengnink, K., Prediger, S., Weber, C. (2011). Lernende abholen, wo sie stehen. In: Praxis Mathematik, Heft 40 / 53. Jg., 2011, S. 2-7.

Mähler, C., Stern, E. (2006). Transfer. In: Rost, D. (Hrsg.). Handwörterbuch Pädagogische Psychologie. S. 782-793. Weinheim: Beltz.

Maaß, K. (2011). Mathematisches Modellieren in der Grundschule. Handreichung des Programms *SINUS an Grundschulen.* Kiel: IPN. Download unter: http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Maass_2011-2.pdf [Zugriff am 12.11.2011]

Nührenbörger, M., Pust, S. (2006). Mit Unterschieden rechnen. Lernumgebungen und Materialien für den differenzierten Anfangsunterricht. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Roppelt, A., Reiss, K. (2012). Beschreibung der im Fach Mathematik untersuchten Ergebnisse. In: Stanat, P., Pant, H. A., Böhme, K., Richter, D. (Hrsg.). Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011. Münster: Waxmann.

Selter, C. (2004). Erforschen, Entdecken und Erklären im Mathematikunterricht der Grundschule: Mehr als Kenntnisse und Fertigkeiten. Publikation des Programms SINUS-Transfer Grundschule. Kiel: IPN. Download unter http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_STG/Mathe-Module/M2.pdf [Zugriff am 12.11.2011]

Selter, C. (2010). »Mathe-Konferenzen« – Eine strukturierte Kooperationsform zur Förderung der sachbezogenen Kommunikation unter Kindern. Material aus dem Projekt PIK AS: Haus 8 – Guter Unterricht. Download unter:
http://www.pikas.tu-dortmund.de/upload/Material/Haus_8_-_Guter_Unterricht/UM/Mathe-Konferenzen/Basisinfos/Infopapier_Mathekonferenzen.pdf
[Zugriff am 12.11.2011]

Siebel, F., Wittmann, G. (2012). Mehr als Rechnen – Über den Zahlenblick zu funktionalem und algebraischem Denken. In: Mathematik lehren, Heft 171, 2012, S. 2-8.

Stern E., Felbrich, A. , Schneider, M. (2006). Mathematiklernen. In: Rost, D. (Hrsg.) Handbuch Pädagogische Psychologie, S. 461-469. Göttingen: Hogrefe.

Treffers, A. (1983). Fortschreitende Schematisierung, ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr. In: Mathematik lehren, Heft 1, S. 15-20.

Wartha, S., Schulz, A. (2011). Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen. Handreichung des Programms *SINUS an Grundschulen.* Kiel: IPN. Download unter http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_WarthaSchulz.pdf [Zugriff am 12.11.2011]

Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D., Köller, O. (Hrsg.) (2008). Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Berlin: Cornelsen.

Winter, H. (1982). Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. In: mathematica didactica, Heft 4, S. 185-211.

Winter, H. (1987). Mathematik entdecken. Neue Ansätze für den Unterricht in der Grundschule. Frankfurt a. M.: Scriptor.

Partner des Programms *SINUS an Grundschulen*

Programmträger: IPN, Kiel
Projektleitung: Prof. Dr. Olaf Köller
www.ipn.uni-kiel.de

SINUS an Grundschulen
Projektkoordination am IPN: Dr. Claudia Fischer
Tel. +49(0)431/880-3136
cfischer@ipn.uni-kiel.de
www.sinus-an-grundschulen.de

Programmkoordination für die Länder durch das
Ministerium für Bildung und Wissenschaft
des Landes Schleswig-Holstein (MBW)
Dr. Kai Niemann
www.schleswig-holstein.de/MBW/DE/MBW_node.html

Serverbetreuung: Deutsches Institut für Internationale
Pädagogische Forschung (DIPF)
www.dipf.de

ISBN für diese Handreichung
978-3-89088-227-7