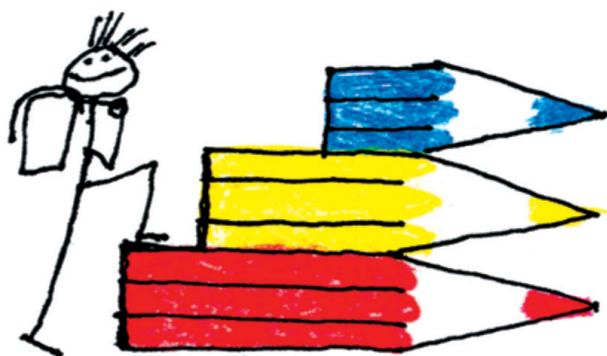


Die Praxis des Dialogischen Mathematikunterrichts in der Grundschule

Peter Gallin



an Grundschulen

Steigerung der Effizienz des
mathematisch-naturwissenschaftlichen
Unterrichts

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
2 Einführung ins Dialogische Lernen	4
3 Von der Genese des Zahlbegriffs	9
4 Folgerungen für die Arbeit mit dem Stellenwertsystem	13
5 Das Einmaleins	17
6 Termumformungen	22
Literaturverzeichnis	32

Impressum

Prof. Dr. Peter Gallin

Die Praxis des Dialogischen Mathematikunterrichts
in der Grundschule

Publikation des Programms *SINUS an Grundschulen*
Programmträger: Leibniz-Institut für die Pädagogik
der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN)
an der Universität Kiel



Olshausenstraße 62
24118 Kiel

www.sinus-an-grundschulen.de

© IPN, September 2012

Projektleitung: Prof. Dr. Olaf Köller
Projektkoordination: Dr. Claudia Fischer
Redaktion u. Realisation dieser Publikation:
Brigitte Döring, Verena Hane, Sonja Dierk
Kontaktadresse: info@sinus-grundschule.de

ISBN: 978-3-89088-225-3

Nutzungsbedingungen

Das Kieler Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) gewährt als Träger der SINUS-Programme ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht-kommerziellen Gebrauch bestimmt. Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen: Auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments müssen alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten werden. Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgendeiner Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, vertreiben oder anderweitig nutzen. Mit der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Die Praxis des Dialogischen Mathematikunterrichts in der Grundschule

1 Einleitung

Der Dialogische Unterricht in allen Schulfächern zeichnet sich durch das Gleichgewicht zwischen Angebot und Nutzung aus. Das bedeutet, dass er nur im Zusammenhang mit konkreten und selbstverantworteten Arbeiten der Schülerinnen und Schüler – den Belegen ihrer Nutzung – realisiert und beurteilt werden kann. Um diese Nutzung klar ins Zentrum zu stellen, soll in dieser Handreichung zuerst eine kurze Übersicht über das Dialogische Lernen und seine wichtigsten Stationen gegeben werden. Erst in einem zweiten Schritt sollen die Angebote, also curriculare Fragen der Grundschule, diskutiert werden. Es werden dabei einige Akzente aus pädagogisch-didaktischen Gründen so gesetzt, dass sie altbekannte Themen vielleicht neu beleuchten. Zu diesem Zweck werden zu zentralen Themen des Mathematikunterrichts mögliche Kernideen angesprochen, welche neben dem fachlichen immer auch einen menschbezogenen Aspekt mit einschließen.

Betrachtet man moderne Unterrichtshilfen und Lehrbücher, entsteht der Eindruck, dass sehr viele verschiedene Themen im Bereich der Grundschulmathematik behandelt werden müssten. Dieser Eindruck wird vor allem durch die vielfältigen didaktischen Aufbereitungen gestützt, welche die Autoren dieser Lehrmittel erfunden haben, um die Mathematik für die Kinder attraktiv zu machen. Dahinter steckt die Überzeugung, dass die Mathematik vor allem durch einen konsequenten Alltagsbezug sinnvoll gemacht werden kann¹. Neuere Forschungen im Bereich der Mathematikdidaktik haben aber gezeigt, dass der Bezug zur realen Lebenswelt der Kinder keineswegs notwendig ist, um die Motivation und das Interesse der Kinder zu wecken. Ein einziger Beleg soll hier genügen. Zur Dissertation von Anna Susanne Steinweg mit dem Titel „Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern: Epistemologisch-pädagogische Grundlegung“ (Universität Dortmund, 2000) lesen wir im Verzeichnis Mappedia der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik folgenden Text:

Als Hauptergebnis ist festzuhalten, dass über die Hälfte der beteiligten Kinder in der Lage ist Zahlenmuster zu erkennen und zu beschreiben, obwohl die Kinder keine unterrichtlichen Vorerfahrungen zum Thema Zahlenmuster hatten. Bei der Darbietung der Testaufgaben wird bewusst auf Einkleidungen und Beziehungen zur realen Lebens-

1 Unter www.gallin.ch kann mein Artikel „Vom Sinn des Mathematikunterrichts“ heruntergeladen werden.

welt der Kinder verzichtet. Dass sich die Kinder motiviert mit den Aufgaben befassen, ist ein klares Indiz dafür, dass Mathematik auch in ihrer reinen Form kindgemäß ist.

Diese Einsicht führt zu einer erheblichen Vereinfachung und Verwesentlichung des Mathematikunterrichts in der Grundschule. Dabei kann man sich auf die zentralen Themen konzentrieren und muss nur dafür sorgen, dass sie zu Kernideen gebündelt und in attraktiven Aufträgen an die Kinder herangetragen werden. Lässt man den Kindern genügend Zeit, sich mit den Aufträgen zu befassen und gibt man ihnen verstärkende Rückmeldungen, so wird ihre Motivation auch bei rein mathematischen Fragestellungen wachsen.

In der vorliegenden Handreichung beschränke ich mich nach der kurzen Einführung ins Dialogische Lernen auf folgende Fachthemen:

- *Zahlbegriffs-genese*
- *Konsequenzen für die Arbeit mit dem Stellenwertsystem*
- *Einmaleins*
- *Termumformungen*

Der Bezug zum Alltag soll trotz der obigen Bemerkung nicht zu kurz kommen. Er wird über Rechengeschichten hergestellt, welche aber in der Regel nicht von den Lehrpersonen, sondern von den Lernenden selbst erfunden werden.

2 Einführung ins Dialogische Lernen

Beim dialogisch konzipierten Unterricht ist der Grundgedanke leitend, dass der Anteil des Angebots, welchen die Lehrperson den Lernenden macht, etwa den gleichen zeitlichen und inhaltlichen Umfang hat wie die Nutzung, d.h. der Anteil der Schüleraktivitäten, welche sich in ihren Beiträgen zum Unterricht niederschlagen². Damit situiert sich das dialogische Konzept etwa in der Mitte zwischen Instruktion und Konstruktion und trägt den drei wissenschaftlichen Befunden Rechnung, dass Wissensvermittlung hoch wirksam ist, dass Lernen ein aktiver und konstruktiver Prozess ist und dass selbstgesteuertes Lernen einen langfristigen und flexibel nutzbaren Lernertrag hat. In der folgenden Abbildung ist der schematische Ablauf von dialogischem Unterricht dargestellt. Dabei sind Kernidee und Auftrag Positionen, welche von der Lehrperson angeboten werden, während das Journal und die Rückmeldung ganz der Nutzung – der Art, wie die Lernenden die Sache sehen – und der Rezeption verschrieben sind. Die Normen sind gewissermaßen das Ziel des Unterrichts und sollten im Idealfall aus einer Verschmelzung von Angebot und Nutzung abgeleitet werden können.

Um die Stationen des Kreislaufs genauer zu kommentieren, entnehme ich teilweise Texte aus dem Buch „Besser lernen im Dialog“ (siehe Fußnote), die ich darin unter dem Titel „Den Unterricht dialogisch gestalten – neun Arbeitsweisen und einige Tipps“ publiziert habe.

² Zum Angebot-Nutzungs-Modell, das auf Helmut Fend zurückgeht, siehe: Urs Ruf, Stefan Keller, Felix Winter (Hrsg.)(2008): Besser lernen im Dialog, Seite 14.

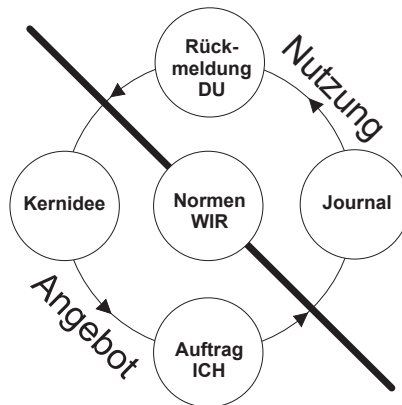


Abb. 1: Kreislauf des Dialogischen Lernens im Angebot-Nutzungs-Modell

a) Der Auftrag (ICH)

Der allererste Auftrag, den eine Lehrperson beim Einstieg in ein neues Fachgebiet einer Klasse stellt, muss mit sehr viel Umsicht gebaut und erläutert werden. Zentral ist dabei die Botschaft an die Schreibenden, dass sie wirklich alles aufschreiben, was ihnen durch den Kopf geht. Im Vergleich zum traditionellen Unterricht sind solche Anforderungen derart ungewohnt, dass bereits bei der Formulierung des Auftrags besonders auf Folgendes geachtet werden muss: Der Auftrag soll offen sein, die Schülerinnen und Schüler ansprechen und ihre Gedanken und Gefühle herausfordern. Im Dialogischen Unterricht wird beim Arbeiten an Aufträgen nicht auf Fehler, sondern auf Qualitäten geachtet. Und zu den Qualitäten gehört es eben, dass Gedanken offen dargelegt werden, dass die Lernenden die Lösungsversuche beschreiben, dass sie in eigener Regie nach Fehlern suchen, dass sie – wenn nötig – selbst Korrekturen anbringen und dass sie nach den fachlichen Besonderheiten forschen. Im Lernjournal (siehe weiter unten) soll möglichst viel von dem, was und wie gearbeitet wird, seine Spuren hinterlassen. Wenn das von der Klasse verstanden ist und zu einer veränderten Haltung gegenüber der eigenen Arbeit geführt hat, ist das Erteilen eines Auftrags kaum aufwendiger als das Stellen einer Hausaufgabe. Unumgänglich ist aber, dass der Auftragstext im Journal unmittelbar vor dessen Bearbeitung eingetragen wird. Außerdem sollte für jeden Auftrag ein Abgabedatum festgelegt sein, damit man nachträglich auf ihn verweisen kann.

Den Unterschied zwischen Auftrag und Aufgabe kann man sich rein äußerlich schnell klar machen. Aufträge werden eingesammelt und grob bewertet, Aufgaben nicht.³ Inhaltlich gilt eine einfache Regel für Aufträge: Ein Auftrag muss so gestellt sein, dass die Lehrperson selbst oder sogar eine Fachperson ihn mit Interesse und Freude bearbeiten möchte. Er muss also ein fachlich relevantes Thema anschneiden und kann, damit die Spannung überhaupt aufgebaut wird, nicht etwas Bekanntes zum Thema haben. Trotzdem ist es möglich, gewöhnliche Aufgaben als Aufträge einzusetzen, sobald es für die Klasse selbstverständlich ist, in den Aufgaben den theoretischen Gehalt oder eine weiterführende Problematik zu entdecken.

³ Zur vierwertigen Bewertung mit Häklein siehe Ruf, U., Gallin, P. (1999): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, Band 1, Seite 81 ff.

Als Beispiel möge eine Aufgabe dienen, welche an der Kantonsschule Zürcher Oberland anlässlich der Aufnahmeprüfung ans Gymnasium (ins 7. Schuljahr) gestellt worden ist. Dabei habe ich die ursprüngliche Fragestellung als „Aufgabe“ abgespalten, damit sie sich deutlich abhebt. Will man aus dieser Problemstellung einen Auftrag machen, so muss das Kind direkt angesprochen und dazu aufgefordert werden, alle Gedanken und Gefühle niederzuschreiben.

In jeder von fünf Schachteln befinden sich gleich viele Spielfiguren. Nachdem man aus jeder Schachtel 18 Spielfiguren herausgenommen hat, verbleiben in den fünf Schachteln im Ganzen so viele Spielfiguren, wie vorher in zwei Schachteln enthalten waren.

Aufgabe (Defizitperspektive)

- Wie viele Spielfiguren befanden sich am Anfang in jeder Schachtel?

Auftrag (Entwicklungsperspektive)

- Achte beim Lesen dieses Textes auf deine Gedanken und Gefühle. Schreibe alles auf, was dir durch den Kopf geht.
- Zeichne die fünf Schachteln mit deren Inhalt und beschreibe, welche Teile du kennst.

b) Das Journal (Lernjournal, Reisetagebuch)

Damit die Arbeit im dialogischen Unterricht ihren schriftlichen Niederschlag auf geordneten Bahnen findet, ist eine Zusammenfassung der im Unterricht verwendeten Blätter und Aufschriebe sowie aller selbstständig verfassten Texte notwendig. Diese Rolle übernimmt das Journal. Es mag ein reales Heft sein, es kann aber auch aus losen Blättern bestehen, die in einem Ordner gesammelt werden. Wichtig ist der fortlaufende Eintrag des Datums, an dem eine bestimmte Seite bearbeitet wird. Im Falle von losen Blättern müssen zwingend auch der Name und die Blattnummer vermerkt sein.

Im Journal wird alles zusammengetragen, was Papierform hat: Aufträge, Bearbeitungen, Rückmeldungen, Autographensammlungen (siehe unten), Übungen, Prüfungsvorbereitungen, Theorieeinträge, Lehrerkommentare, weitere abgegebene Kopien, Prüfungen und die zugehörigen Fehleranalysen, Reflexionen, Rückschauen usw. Das einzige zuverlässige Ordnungskriterium im Journal ist die Zeit. Die Erfahrung hat gezeigt, dass die Lernenden sich im individuell geführten Journal erstaunlich gut zurechtfinden. Man muss also keine Bedenken haben, wenn die verschiedenen Themen strikt in chronologischer Abfolge im Journal ihre Spur hinterlassen. Als Orientierungshilfe und auch als Prüfungsvorbereitung oder für eine Selbstbeurteilung ist ein nachträglich verfasstes Inhaltsverzeichnis nützlich.

Das Journal ersetzt somit alle Hefte und Ordner des traditionellen Unterrichts. Die Lehrperson braucht sich damit nicht mehr um eine ausgeklügelte Aufteilung der im Unterricht anfallenden Texte in Theorieheft, Übungsheft, Prüfungsheft, Arbeitsblätter, Sudelheft usw. zu kümmern. Es wird einfach laufend protokolliert, was im Unterricht und bei der Hausarbeit passiert.

c) Rückmeldung (DU)

Im Dialogischen Unterricht werden die Texte, welche von den Lernenden verfasst sind, immer gelesen und mit einer, oft nur minimalen, Rückmeldung versehen. Dazu gibt es mehrere Spielformen. Bei jüngeren Kindern oder beim Einstieg in ein neues Thema hat sich der sogenannte Sesseltanz bewährt: Dabei liegt vor jedem Schüler oder jeder Schülerin die eigene Bearbeitung des aktuellen Auftrags zusammen mit einem vorbereiteten leeren Blatt, das nur den Titel „Rückmeldungen“ trägt. Dann erheben sich alle Lernenden und suchen sich einen fremden Platz, setzen sich und studieren den Text einer anderen Person. Sie haben dann die Aufgabe, ihren Lernpartnern eine wohlwollende oder auch kritische Rückmeldung zu schreiben, die auf jeden Fall mit dem eigenen Namen unterzeichnet wird. Danach erheben sich die Lernenden und suchen einen anderen Platz, der freigegeben worden ist. (Natürlich kann in Ausnahmefällen erlaubt werden, dass ein Lernender an seinem Platz sitzen bleibt und so erreicht, dass kein Fremder die persönliche Arbeit liest, aber auch er keine anderen Arbeiten zu Gesicht bekommt.)

Im Sesseltanz kommen auf jede Arbeit in der Regel mehrere Rückmeldungen von Mitschülerinnen und Mitschülern. Der Horizont der Bearbeitungsmöglichkeiten eines Auftrags wird damit stark erweitert, und der respektvolle Umgang miteinander wird eingeübt. Der Sesseltanz eignet sich vor allem in jenen Themensequenzen, bei denen die kognitiven Unterschiede der Schülerinnen und Schüler noch nicht allzu groß sind. Besonders attraktiv ist ein Sesseltanz dann, wenn auch die Lehrperson selbst eine eigene Bearbeitung des Auftrags zur Einsicht frei gibt und so als normales Mitglied im Sesseltanz agiert. Ein mündlicher Austausch am Schluss kann den Sesseltanz abrunden und seine Konsequenzen können zur Fortsetzung des Unterrichts genutzt werden.

Eine zweite Rückmeldeart, welche durchaus auch mit dem Sesseltanz kombiniert werden kann, ist die Autographensammlung. Dazu sammelt die Lehrperson alle Journaltexte ein und sieht sie durch. Keinesfalls darf diese Durchsicht mit einer Korrektur verwechselt werden. Es wird nur auf Qualitäten geachtet und besonders Auffälliges, Weiterführendes ins Auge gefasst. Die Lehrperson wählt dabei ein paar wenige Arbeiten oder Abschnitte aus den Journaltexten aus, um sie in kopierter Form in der nächsten Lektion in die Klasse einzuspielen. Bei der Auswahl wird besonders auf regulär hervorragende oder singulär interessante Bearbeitungen, aber auch auf neue Fragestellungen oder typische Irrtümer und Sackgassen geachtet. Dank der heute ausgereiften Kopiermöglichkeiten kann die Lehrperson ohne großen Aufwand die ausgewählten Ausschnitte der Journale (leicht verkleinert) auf ein bis zwei Blättern für die ganze Klasse kopieren. Die Schülerinnen und Schüler erhalten mit jeder Autographensammlung einen Einblick in die Lösungen der anderen Klassenmitglieder. Mit diesen können und sollen sie sich auseinandersetzen und dabei die Besonderheiten ihres eigenen Vorgehens bewusst erleben. Schließlich kann anhand der Autographensammlung ein Gespräch über typische Merkmale und Qualitäten guter Lösungen geführt werden. Wenn dann der Fortgang des Unterrichts durch solche authentischen Texte wesentlich beeinflusst wird, ist das ein Beleg für das Ernstnehmen der Schülerinnen und Schüler. Wenn die Autographen in der Klasse besprochen und Folgerungen aus ihnen zur Theorie und zu Werkzeugen der gemeinsamen fachlichen Arbeit gemacht werden, wächst das Gefühl der Lernenden, einem Sachgebiet nicht einfach ausgeliefert zu sein, sondern darin tatsächlich noch etwas bewirken zu können. Auch die Lehrperson zieht einen großen Vorteil aus der Autographensammlung. Selbst wenn sie schon viele Male denselben Stoff unterrichtet

hat, entsteht keine lähmende Routine in Vorbereitung und Durchführung der Lektionen. Jede Klasse wird zu einem Unikat und die Spannung bleibt erhalten.

Es könnte vermutet werden, dass die Originalität und gedankliche Breite der Autographensammlungen mit steigender Klassenstufe abnimmt, während sie bei den jüngeren Schülern noch unverbraucht sprudeln kann. Die Erfahrung zeigt, dass jüngere Schülerinnen und Schüler tatsächlich viel Phantasie und Ideenreichtum aufs Papier bringen können, während aber das wachsende fachliche Repertoire für ältere Schülerinnen und Schüler weitaus mehr Möglichkeiten zur Behandlung eines neuen Problems bietet und sich so die Phantasie im Fach selbst niederschlägt und der gemeinsamen Arbeit zugutekommt.

d) Kernidee

Dialogischer Unterricht lässt sich nicht bis in alle Details auf Wochen hinaus planen. Oft steht die Gestaltung einer Lektion erst dann fest, wenn die Journale der Lernenden gesichtet sind und eine Autographensammlung hergestellt ist. In ihr liegen die Kernideen der kommenden Lektion.

Nur ganz am Anfang, wenn noch kein Unterricht voraus gegangen ist, muss die Lehrperson zum neuen Stoffgebiet eine Kernidee generieren. Es geht also darum, eine herausfordernde Sicht auf einen komplexen Stoff zu entwickeln, welche in der Lehrperson möglichst tief verankert ist. Dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- Durch die Ausbildung der Lehrperson in einem Fach ist die wichtigste Grundlage zur Ermittlung persönlicher Kernideen geschaffen worden. Die Lehrperson musste den Stoff im betreffenden Fachgebiet schließlich durch ihre eigenen Leistungen meistern und sich so ein Fachwissen erwerben. Dadurch sind bei ihr persönlich gefärbte Einsichten und erzählenswerte Lernbiografien (eigene und auch fremde) entstanden. Der erste Schritt zur Generierung von Kernideen ist also, sich an jene vergangenen Erlebnisse beim ersten Kontakt mit dem Stoff zu erinnern, und sie an die Oberfläche zu heben.
- Das dialogische Prinzip kann auch beim Fehlen solch biografischer Kernideen im Vorfeld des Unterrichts aktiviert werden: Die Lehrperson muss dazu eine vertraute, aber fachfremde Person einladen, den Gedanken des kommenden Unterrichts probeweise zu folgen. Es entspinnt sich dabei häufig ein Dialog, aus dem die Kernideen für die erste Lektion gewonnen werden können. Die aktuell erlebte Begegnung zwischen Stoff und Person kann als Kernidee für den Unterricht benützt werden.

e) Normen (WIR)

Die Regeln, die Abmachungen, die Theorie – kurz der zu lernende Stoff – wird normalerweise erst nach einem Durchgang durch den Kreislauf zusammengestellt und verbindlich aufgeschrieben. Selbstverständlich können auch Lehrbücher an dieser Stelle eingesetzt werden. Am eindrücklichsten ist es für die Lernenden, wenn die Bestandteile der Autographensammlung in der Darstellung der Lehrperson erkennbar sind. Damit kommt das ICH-DU-WIR-Prinzip zum Abschluss: Zuerst steht die individuelle Auseinandersetzung eines ICHs mit dem Auftrag, dann wird diese von anderen DUs angeschaut und kommentiert. Schließlich fasst die Lehrperson alle interessanten Einsichten in einer WIR-Position zusammen.

Zum eingangs gezeigten Beispiel mit den fünf Schachteln haben sich im Verlauf der Arbeit mit verschiedenen Lerngruppen bereits vier verschiedene Lösungsansätze (Abb. 2) ergeben. Bei der Besprechung der Aufgabe können sich dann die Lernenden viel besser mit der regulären Einsicht befreunden, weil sie sich zu einer bestimmten Variante besonders hingezogen fühlen. Die Gefahr einer Mathematikschädigung – einer Schädigung durch Vermitteln unverstandener Algorithmen – ist damit weitgehend gebannt.

Enaktiv und ikonisch

Imaginativ mit Anteilen

In jeder Schachtel befinden nach der Entnahme von 18 Spielfiguren noch $\frac{2}{5}$ der Spielfiguren

Ganzheitlich und elegant

Aus der ganzen Anlage sind 5 mal 18 Spielfiguren entnommen worden. Das sind die 90 Spielfiguren, welche in den drei Schachteln am Ende fehlen.

Symbolisch

x = Anzahl Spielfiguren in jeder Schachtel am Anfang

Gleichung:
 $5(x - 18) = 2x$
 $3x = 90$
 $x = 30$

Abb. 2: Vier verschiedene, von Schülerinnen und Schülern gefundene Lösungswege zur Aufgabe mit den fünf Schachteln

3 Von der Genese des Zahlbegriffs ⁴

Die größte Einteilung der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... macht eine Unterscheidung zwischen Kardinalzahl und Ordinalzahl. Mit der Kardinalzahl 7 werden alle Mengen mit sieben Elementen charakterisiert. Man sagt auch, dass die Kardinalzahl die Mächtigkeit der Menge angibt. Mit der Ordinalzahl 7 wird die Stellung eines Objekts innerhalb einer geordneten Reihe der Objekte festgestellt: Das Objekt steht an der Stelle mit Nummer 7. Die Verbindung beider Zahlbegriffe findet statt, sobald einem Kind klar wird, dass aus der siebten Stellung des Objekts folgt, dass die Menge aller Objekte vor dem betrachteten inklusive dem betrachteten selbst die Mächtigkeit 7 aufweist. Schon rein durch diese Unterscheidung von zwei Zahlbegriffen wird deutlich, dass der Ordinalzahlbegriff elementarer ist als der Kardinalzahlbegriff. Der Zahlbegriff ist aber stets auf beide Aspekte abgestützt und kann erst dann als erworben gelten, wenn beide Aspekte zu einer untrennbaren Einheit verschmolzen sind (Hess 2002, S. 89 ff.).

⁴ Auszug aus meinem Artikel: *Vom Zahlbegriff zum Längenmaß*, 4 bis 8 Fachzeitschrift für Kindergarten und Unterstufe, Nr. 3, März 2010, Seiten 6-9.

Diese Einsicht hat bereits Jean Piaget (1965) durch seine Forschungen gewonnen und publiziert. Da im realen Unterricht jedoch nicht davon ausgegangen werden kann, dass der Zahlbegriff in seiner Vollform bereits erworben ist, möchte ich hier im Detail auf die im Lernprozess dominante Rolle der Ordinalzahl (Zählzahl) eingehen, damit sie wieder mehr Beachtung im Unterricht finden kann.

a) Der Ordinalzahlbegriff

Tatsächlich verläuft die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kind in der Regel von der Ordinalzahl zur Kardinalzahl. Der Ordinalzahlbegriff selbst wird manchmal noch weiter unterteilt in Zählzahlbegriff und Ordnungszahlbegriff. Hier soll es vor allem um den Zählzahlbegriff gehen. Das Kind lernt zuerst zu zählen.⁵ Dabei muss es drei Aspekte unter einen Hut bringen. Es begegnet zum einen den Ziffern als geometrischen Gestalten. Auf der anderen Seite lernt es, die akustische Zahlreihe nach und nach aufzusagen. Schließlich muss es erkennen, dass jede geometrische Gestalt einem aufgesagten Wort als Namen entspricht. In welcher Reihenfolge diese drei Aufgaben bewältigt werden, ist unerheblich und variiert von Kind zu Kind. Die einen lernen zuerst die Ziffern als Objekte mit Namen kennen, die andern werden zuerst nur akustisch mit dem Sprüchlein „eins, zwei, drei, vier, ...“ vertraut. Durch das Sprüchlein werden die Ziffernobjekte in eine Reihe gebracht, die auch mit konkreten Ziffern ausgelegt werden kann. Es ist in keiner Weise selbstverständlich, dass das Kind bei vorliegender Ziffernreihe mit dem Finger in genau synchroner Weise den Objekten folgt, wenn es dazu das Sprüchlein auf sagt. Diese eindeutige Zuordnung von ausgesprochenem Wort und gezeigtem Objekt muss ihrerseits erst gelernt werden (Abb. 3). So bildet sich der Ordinalzahlbegriff, der sich zunehmend festigt, so dass die Stellung einer Zahl in ihrer lokalen Umgebung als mentales Vorstellungsbild vertraut wird. Dann muss nicht mehr die ganze Zahlreihe von vorne aufgesagt werden, wenn man die Nachbarn einer Zahl nennen will.

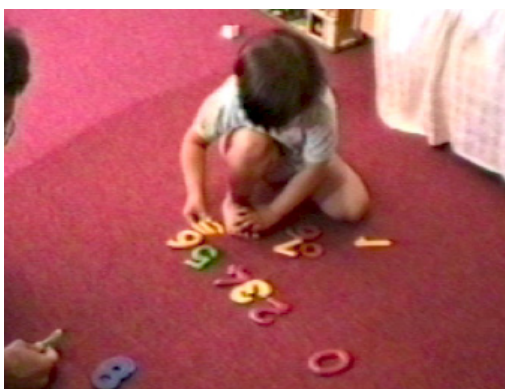


Abb. 3: Valeria mit 2 Jahren und 8 Monaten: Zuerst legt sie ihre roten oder gelben Ziffern auf die von mir gelegten grünen oder blauen Ziffern. Wenig später legt sie ihre Ziffern zuerst an eine richtige Stelle und ich lege meine als Bestätigung darauf. Schließlich sagt sie das Sprüchlein mit den Namen der Ziffern auf und zeigt mit dem Finger (meistens aber nicht immer!) synchron auf die zugehörige Ziffer.⁶

⁵ In der Bachelorarbeit von Simone Zimmermann „Konstruktion versus Instruktion“ (herunterzuladen unter: digibib.hs-nb.de/file/dbhsnb_derivate_0000001191/Bachelorarbeit-Zimmermann-2012.pdf) wird die Zahlbegriffsentwicklung gut dargestellt und kritisch auf die Haltung Piagets eingegangen.

⁶ Abbildungen 3, 5 und 6 sind Standbilder einer älteren Videoaufnahme von Peter Gallin.

Eine Schlüsselstellung beim Erwerb des Zählzahlbegriffs nimmt das rhythmische Zählen ein. Das Wiederkehrende, das Repetitive, das Rituelle steht am Anfang des Zahlbegriffs schlechthin. Man beobachtet Kinder, die anfangs irgendwelche Zahlwörter aufsagen, ohne auf deren wirkliche und lückenlose Reihenfolge zu achten: „eins, zwei, drei, acht, sechs, ...“. Wichtig ist also nur die regelmäßige zeitliche Abfolge; man könnte sagen: Am Anfang des Zahlbegriffs, insbesondere des Ordinalzahlbegriffs, steht die Litanei, die rhythmische Musik. Die Ordinalzahl begründet sich also primär in der Zeit und erst sekundär im Raum, der später bei der Bildung der Kardinalzahl wichtig wird. Diese Unterscheidung ist bei der Beschäftigung mit Längenmaßen wichtig. Das didaktische Hauptproblem der – natürlich räumlichen – Längenmaße wird sein, ihnen wieder einen zeitlichen Charakter zurückzugeben.

Durch die rhythmische Bewegung des abzählenden Fingers (beispielsweise) von links nach rechts wird die Brücke von der Zeit zum – vorerst eindimensionalen – Raum geschlagen. Damit wird die Zeit zum ersten Mal räumlich dargestellt. Das geschieht auch beim Schreiten, wenn dazu die Schritte gezählt werden. Zur didaktischen Unterstützung dieses wichtigen Übergangs von der Zeit zum Raum eignet sich der traditionelle klappbare Meterstab oder das flexible Band des Schneidermeters besonders gut (Abb. 4).



Abb. 4: Klappbarer Meterstab und Schneidermeter⁷

Ohne zunächst überhaupt auf den Begriff des Längenmaßes einzugehen, kann das Kind mit diesen realen Zahlenreihen das rhythmische Zählen und gleichzeitige Bewegungen des Fingers koordinieren und wird dabei kaum gegen oben hin eingeschränkt. Es eröffnet sich die Welt der Unendlichkeit und gleichzeitig wird die Neugier auf die neuen Namen und Schreibweisen geweckt (Abb. 5).

⁷ Bildnachweis siehe Seite 33.



Abb. 5: Valeria mit 4 Jahren und 2 Monaten: Sie zählt mit monotoner Stimme und konsequent folgendem Finger streng rhythmisch auf dem Doppelmeter bis etwa 39. Dort fängt das Unbekannte an, das aber durch kleine Hinweise auf „Vierzig, Einundvierzig, Zweiundvierzig, ...“ schnell vereinnahmt wird. Der Zahlbegriff bleibt noch ordinal.

b) Der Übergang zum Kardinalzahlbegriff

Es wäre ein Trugschluss zu glauben, dass ein Kind, welches auf dem Metermaß korrekt zählen (zeigen und sprechen) kann, das Längenmaß bereits verstanden habe. Denn das Längenmaß hat den nicht-ordinalen Charakter einer Kardinalzahl und gibt die Mächtigkeit einer Menge – die Gesamtlänge – bestehend aus Einheitslängen an. Das ganzheitliche Erfassen der Mächtigkeit ist der eigentliche Entwicklungsschritt von der Ordinalzahl zur Kardinalzahl. Dieser Schritt wird kaum mittels reiner Zahlen, wie sie bisher ausgesprochen und gezeigt worden sind, sondern nur mit Hilfe von konkreten Sorten („Maßeinheiten“) zu schaffen sein. Immer wieder tauchen Geschichten auf, bei denen von „vier Äpfeln“, „achtzehn Kindern“ usw. die Rede ist. Dann führt das Abzählen zur Einsicht, dass „soundso viele Stücke“ vorhanden sind (Abb. 6).



Abb. 6: Valeria mit 4 Jahren und 3 Monaten: Vom großen Bruder hat sie Salzteigziffern erhalten. Das alte Spiel des richtigen Auslegens ist nur noch ein Ritual. Jetzt aber zählt sie die ausgelegten Stücke und zwar von rechts nach links. Sie schiebt die Ziffer 9 zur Seite und sagt: „ein Stück“. Dann die Ziffer 8: „zwei Stücke“, bis zur Ziffer Null: „zehn Stücke!“. Die Kardinalzahl „zehn“ ist geboren. (Valeria hat nach einem Fehlstart bei der Ziffer 0 von selbst entschieden, bei der Ziffer 9 zu beginnen. Sonst hätte sie beim Anfassen der Ziffer 0 „ein Stück“ bei der Ziffer 1 „zwei Stück“ usw. aussprechen müssen, was ihr doch zu verwirrend war.)

Das Aneinanderreihen von lauter gleichartigen Würfelchen und die Mächtigkeit dieser Würfelketten liefert das Längenmaß. Dabei ist es wichtig, dass die einzelnen Würfelchen selbst dann noch sichtbar sind, wenn eine ganze Stange der entsprechenden Länge vorgelegt wird. Immer wieder soll es möglich sein, die rhythmische Abfolge mit dem Finger nachvollziehen zu können. Stangen ohne Unterteilungen in Einheiten, wie etwa die Cuisenaire-Stäbchen, sind für den Aufbau des Längenmaßbegriffs also nicht förderlich und sollten nicht zu früh eingesetzt werden. Es besteht bei diesem farbigen Material außerdem die Gefahr, dass die Zahlen nur noch über die Farbe – also einer vierten Kennzeichnung – erkannt werden, nachdem bereits das geometrische Ziffernbild, die akustische Bezeichnung und der ganzheitliche Mächtigkeitsaspekt (Länge) zu verarbeiten waren. Es soll nicht zu früh das innere rhythmische Abzählen durch eine strukturlose – nur noch farbige – Länge überdeckt werden.

Tatsächlich sind die mathematischen Objekte in ihrer reinen und abstrakten Form nicht an die Zeit gebunden. Sie sind durch Beziehungen untereinander festgelegt. Das bedeutet aber nicht, dass beim Lernprozess in der Mathematik, zeitliche Abläufe (Geschichten) zu vermeiden wären. Im Gegenteil: Bei der Rückbesinnung auf den zeitlichen Aspekt der an sich zeitlosen mathematischen Objekte handelt es sich um ein didaktisches Verfahren zum Ausgleich von „funktionalem“ und „prädikativem“ Denken. (Diese beiden Denkweisen entsprechen grob den unterschiedlichen Aufgaben der linken und rechten Hirnhälfte.) Erfolgreiches mathematisches Handeln basiert auf dem ausgewogenen Zusammenspiel beider Denkweisen: Das funktionale Denken betont das zeitliche Nacheinander – das Funktionieren, das Prozesshafte – und wird im Mathematikunterricht oft vernachlässigt; das prädikative Denken befasst sich mit statischen Eigenschaften – dem Zeitlosen, den ganzheitlichen Beziehungen –, wie das auch beim Längenmaß der Fall ist. (Schwank 2003, S. 70-78)

Übersicht	
Ordinalzahl	Kardinalzahl
Rhythmus, Musik, Schreiten	Mächtigkeit, Größen, Längen
Zeit	Raum
Prozesse, Dynamik	Beziehungen, Statik
Funktionales Denken	Prädikatives Denken

4 Folgerungen für die Arbeit mit dem Stellenwertsystem

Es gibt ein auf Maria Montessori zurückgehendes, von Zoltan Paul Dienes verbreitetes Unterrichtsmaterial, welches gerne für die Veranschaulichung des Funktionierens von Stellenwertsystemen herangezogen wird: die Mehrsystemblöcke.

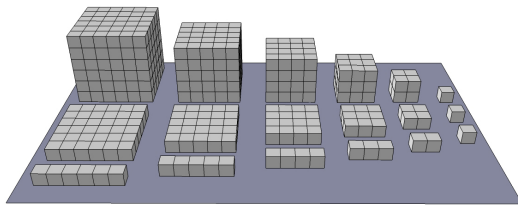
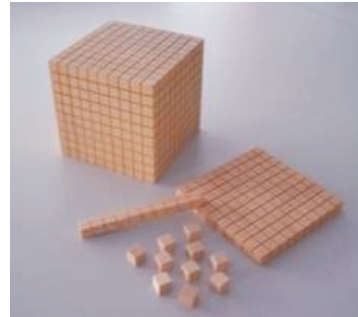
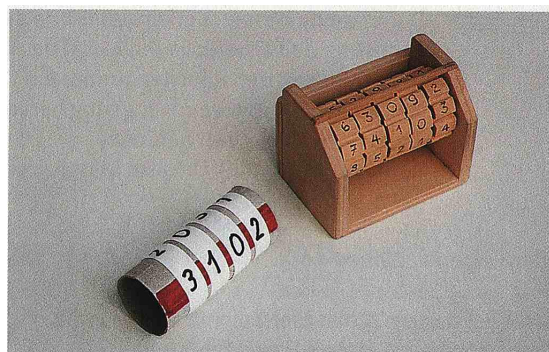
Abb. 7: Multibasen zum 2er, 3er, 4er, 5er und 6er-System⁸

Abb. 8: Mehrsystemblöcke zum Zehnersystem

In der Schule wird oft nur das Zehnersystem mit den Mehrsystemblöcken visualisiert, so dass der Begriff „Mehrsystem“ bereits in der Luft hängt. Es ist offensichtlich, dass dieses Material ganz dem Kardinalzahlbegriff verhaftet ist und dabei die Raumdimensionen für den Stellenwert benützt: Im Zehnersystem werden die Einer 0-dimensional, die Zehner 1-dimensional, die Hunderter 2-dimensional und die Tausender 3-dimensional dargestellt. Für die Zehntausender müsste man einen 4-dimensionalen Würfel bauen, was natürlich unmöglich ist. So behilft man sich mit einer Stange aus 10 Tausenderwürfeln und kann auf diese Weise auch auf die Hunderttausender als Würfelplatte und die Million als „Würfelwürfel“ weiterschreiten. Zentraler Gedanke des Unterrichtsmaterials ist, die Bündelung von kleinen Einheiten zu immer größer werdenden Gesamtheiten zu veranschaulichen.

Der zeitlich strukturierte, rhythmische Zählvorgang kommt bei diesem Material nicht zum Ausdruck. Dafür gibt es ein anderes Veranschaulichungsmittel, welches in der didaktischen Literatur kaum – oder nur am Rande⁹ – Erwähnung findet: das „Zählwerk“ oder kurz der „Zähler“. Beim Dialogischen Lernen ist entscheidend, dass möglichst früh – also schon vor der Einführung ins schriftliche Rechnen – jedes Kind einen solchen Zähler für sich persönlich herstellt und mit ihm arbeiten lernt.

Abb. 9: Zähler aus „Ich Du Wir 4 5 6“¹⁰

⁸ Weil $1^0 = 1^1 = 1^2 = 1^3 = \dots$, weil also die Potenzen von 1 ununterscheidbar sind, kann es kein 1er-System geben.

⁹ Beispielsweise im Zahlenbuch 4 (1998)

¹⁰ Gallin, P. & Ruf, U. (1999): „Ich Du Wir 4 5 6“, S. 93. Alle Bildnachweise für diese Seite siehe S. 33.

Kernidee des Zählers ist tatsächlich das Zählen, also ein zeitlich, rhythmischer Vorgang. Der Kardinalzahlaspekt ist hier nicht veranschaulicht. Dafür kann das Zählen und seine Rhythmisierung (Bündelung) handelnd erfahren werden, indem das hinterste (rechte) Zählrad gedreht wird und der beschränkte Ziffernvorrat dieses Rads einen dazu zwingt, beim Wiedererscheinen der Null das zweithinterste Rad um eine Stelle weiter zu drehen. Das entspricht beim Zähler des Vierersystems (links in Abb. 9) einer Rhythmisierung nach vier Zähleinheiten, gleich einem Vierertakt in der Musik. Immer wenn das zweithinterste Rad um eine Stelle weiter gedreht wird, ist ein Takt um.¹¹ Das entspricht der Betonung des ersten Schlags eines Taktes in der Musik. Die Betonung wird durch das gleichzeitige und schwierigere Drehen von zwei Rädern aufs Mal erfahrbar. So entsteht also eine zeitlich geprägte Vorstellung des Stellenwerts: Das hinterste Rad dreht am schnellsten, das zweithinterste dreht träger, langsamer und hat dadurch ein größeres „Gewicht“. Entsprechend nochmals langsamer, gewichtiger dreht das dritthinterste Rad. Im Vierersystem entspräche dem Verstellen des dritthintersten Rads musikalisch der Moment, wo nach vier vollen Takten ein Thema zu Ende ist.

Eine ausführliche Gegenüberstellung der Mehrsystemblöcke und des Zählers findet sich im Band 1 von „Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik“. Die Arbeit zum Stellenwertsystem sowie zum schriftlichen Addieren und Subtrahieren mit dem Zähler für die Klassenstufen 3 und 4 wird im Lehrbuch „Ich Du Wir 4 5 6“ (siehe Fußnote 10) ausführlich beschrieben und mit zugehörigen Aufträgen konkretisiert.

Der große Vorteil des Zählers ist, dass jedes Kind einen solchen aus einer leeren WC-Rolle sich selber basteln und damit besitzen kann. Ferner lassen sich die „Rädchen“, welche als Papierstreifen realisiert sind, schnell auswechseln, so dass der Einbezug von nicht-dezimalen Stellenwertsystemen leicht möglich ist. Erst so wird den Kindern klar, dass die Wahl der Zahl 10 als Basis unseres Rechnens an sich willkürlich ist. Und der größte Vorteil ist, dass die Zahlen im „Ablesefenster“ des Zählers – einem farbigen Längsbereich auf der Rolle – gleich schon so erscheinen, wie sie normalerweise geschrieben werden. Das Handeln mit dem Zähler kann dann zur eigenständigen und persönlichen Methode des Behandeln eines Übertrags führen. Im Austausch mit Varianten von anderen Kindern kann dann z.B. ausdiskutiert werden, ob man beim schriftlichen Addieren oder Subtrahieren besser von rechts nach links oder von links nach rechts vorgeht (siehe nächste Seite).

Man mag einwenden, dass das Arbeiten mit dem Zähler an sich den Algorithmus des schriftlichen Rechnens vorgibt und die kardinale Zahlvorstellung nicht dazu gebraucht wird. Das stimmt bis zu einem gewissen Grad und ist durchaus beabsichtigt. Da aber die weiter links liegenden Stellen sich träger bewegen, ist trotzdem eine Wertung vorhanden, so dass die Ziffern nicht als gleichberechtigte Zahlen nebeneinander stehen und damit einfach gedankenlos manipuliert werden. Und da ja die kardinale Zahlvorstellung der ordinalen auch in der Entwicklung des Zahlbegriffs nachgeschaltet ist, ist es durchaus zulässig zuerst das Funktionieren des Zählers zu betrachten und die kardinale Darstellung (beispielsweise durch die Mehrsystemblöcke) hintanzustellen. (Dabei ist aber durchaus zu beobachten, dass Kinder mit Mehrsystemblöcken ebenfalls „gedan-

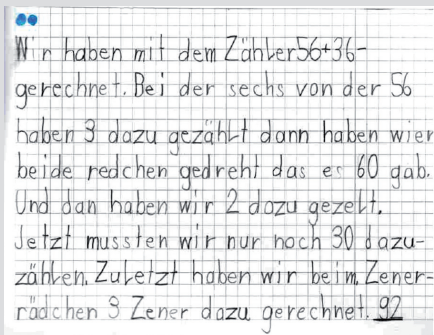
11 Würden Mathematiker Musik dirigieren, zählten sie beim Vierertakt nicht 1,2,3,4, sondern 0,1,2,3.

kenlos“ hantieren können. Es besteht die Gefahr, dass sie die in Spalten unterteilten Formulare, in denen Einer, Zehner, Hunderter, Tausender usw. protokolliert werden, korrekt ausfüllen und Umtauschungen von Spalte zu Spalte genau durchführen, jedoch nicht einsehen, dass quer zu den Spalten eigentliche Zahldarstellungen im betreffenden Zahlensystem ablesbar wären.) Schließlich bietet der Zähler, den man im Alltag überall vorfindet, die Möglichkeit, die Kinder selbstständig an den Verfahren des schriftlichen Addierens und Subtrahierens forschen zu lassen, was einen zentralen Startpunkt des Dialogischen Unterrichts bildet.

Abschließend soll eine kurze Sequenz zur Arbeit mit dem Zähler aus dem Unterricht von Ursula Duss dokumentiert werden. Mit ihrer 2. Primarklasse war sie bei einer 6. Primarklasse im gleichen Schulhaus zu Besuch. Gemeinsam haben sie mit dem Zähler gearbeitet und die kleinen Kinder haben Journaltexte verfasst. Daraus hat Ursula Duss eine Autographensammlung zusammengestellt, welche zu einem neuen Auftrag für die Zweitklässler führte. Es geht um das Abwägen zwischen den Vor- und Nachteilen des „Rechnens von links nach rechts“ und des „Rechnens von rechts nach links“, einer Fragestellung, die selten den Kindern als diskutierbar überlassen wird.

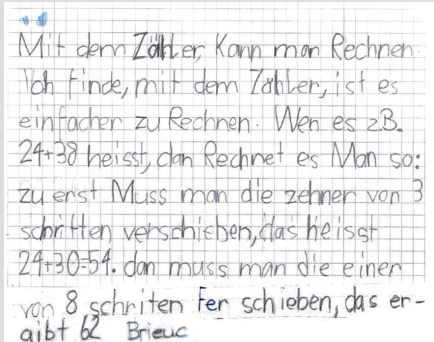
Mit dem Zähler rechnen

Am letzten Donnerstag durften wir zu den 6. Klässlern von Herrn Frey. Die Klasse kann schon gut mit dem Zähler umgehen und sie zeigten uns, wie man 2 Zahlen zusammenzählt. Einige lernten auch Minusrechnen mit dem Zähler.



Wir haben mit dem Zähler $56 + 36$ gerechnet. Bei der sechs von der 56 haben 3 dazu gezählt dann haben wir beide rechnen gedreht das es 60 gab. Und dann haben wir 2 dazu gezählt. Jetzt mussten wir nur noch 30 dazu zählen. Zuletzt haben wir beim Zehner rädchen 9 Zener dazu gerechnet. 92

Mike und Vivianne rechnen zuerst mit den Einern. Sie beschreiben gut, wie man, sobald man bei der 9 ist, 2 Rädchen gemeinsam drehen muss.



Mit dem Zähler kann man rechnen. Ich finde, mit dem Zähler, ist es einfacher zu rechnen. Wenn es z.B. $24 + 38$ heißt, dann rechnet es man so: zu erst muss man die zehner von 3 schritten verschieben, das heißt $24 + 30 = 54$. dann muss man die einen von 8 schritten fern schieben, das ergibt 62. Briec

Noah und Briec beginnen bei den Zehnern. Sie drehen zuerst das Zehner-Rädchen. Jetzt drehen sie das Einer-Rädchen um 8 Schritte hoch. Beobachte was passiert!

• Auftrag

Wähle dir eine Rechnung aus. Rechne zuerst, wie Mike und Vivianne. Versuche nun auch wie Noah und Briec zu rechnen.

• • Auftrag

Welcher Weg gefällt dir besser und warum?

5 Das Einmaleins

Es ist unbestritten, dass die Resultate von Multiplikationen aller Zahlen von 0 bis 10 im Grundschulalter auswendig gelernt sein müssen. Dieses Ziel kann aber auf sehr unterschiedlichen Wegen angesteuert werden. Beim Dialogischen Lernen wird auch in diesem Bereich nach dem ICH-DU-WIR-Prinzip gearbeitet. Das bedeutet, dass am Anfang so oder so die individuellen Gehversuche beim Multiplizieren natürlicher Zahlen ermöglicht und ausgewertet werden. Eine zentrale Rolle spielen dabei die sogenannten „Lieblingsrechnungen“, welche natürlich von Kind zu Kind verschieden sind. Entscheidend ist, dass diese Lieblingsrechnungen bewusst gemacht werden und ausgehend von ihnen die komplizierteren, unangenehmeren Rechnungen abgeleitet werden. Das beginnt bereits beim Lernen der Additionen einstelliger Zahlen¹². Wenn ein Kind die Rechnung $8+8 = 16$ als eine mögliche Lieblingsrechnung entdeckt hat, so wird die Rechnung $7+8 = ?$ zu einem Kinderspiel, weil hier nur Eins weniger vorkommt. Bei diesem Vorgehen wird der heute noch weit überbewertete Zehnerübergang zu einer Nebensache, zu einer Spielform neben vielen anderen.¹³

Lange bevor sämtliche Mal-Rechnungen des Einmaleins thematisiert und automatisiert werden, sollte – bereits im ersten Schuljahr – mit der sogenannten Malbrille gearbeitet werden.¹⁴ Auf diese Weise lernt das Kind, Mal-Rechnungen im Alltag zu „sehen“. Bereits die Erstklässlerin Shebnem¹⁵ stellt fest, dass 12 Kinder einen Tanz sowohl in der Formation $2 \cdot 6$ Kinder als auch in der anderen Formation $6 \cdot 2$ Kinder durchführen können.¹⁶ Der zentrale Auftrag dazu auf den Seiten 64 und 65 im Buch „Ich Du Wir 1 2 3“ lautet folgendermaßen:

Auftrag: Malbrille

•

Setz dir in Gedanken eine Malbrille auf die Nase und schau dich ein bisschen um in deiner Umgebung. Entdeckst du Dinge, die schön in 2er-, 3er-, 4er- oder 5er-Paketen angeordnet sind? Zeichne sie in dein Reisetagebuch und schreibe eine passende Mal-Rechnung dazu.

••

Suche dir einen Ort, wo es viel zu zählen gibt: ein Hochhaus mit vielen Fenstern, ein Dach mit vielen Ziegeln, einen Teich mit vielen Enten. Kannst du die vielen Dinge mit der Malbrille zählen? Siehst du lauter gleiche Pakete? Erzähle deine Rechengeschichten.

Kürzlich hat sich ein Drittklässler von diesem Auftrag anregen lassen, die Anzahl der Löchlein in den Schalldämmplatten an der Decke des Schulzimmers zu zählen. Er kam auf nahezu eine Million.

12 Mathematisch korrekt müssten diese Rechnungen nicht das „Einspluseins“, sondern das „Nullplus-null“ heißen, denn wie beim Wort „Einmaleins“, wo das Neutralelement der Multiplikation mit sich selbst verknüpft wird, müsste beim Addieren konsequenterweise das Neutralelement der Addition – also die Null – mit der Null verknüpft werden.

13 Ruf, U., Gallin, P. (1995). „Ich Du Wir 1 2 3“, Seite 125 ff.

14 Aus: „Ich Du Wir 1 2 3“, Seite 64 ff.

15 Aus: „Ich Du Wir 1 2 3“, Seite 64.

16 Solange man bei konkreten Rechengeschichten bleibt, ist die Multiplikation also nicht kommutativ.

Erst wenn die Bedeutung der Multiplikation im Bereich der natürlichen Zahlen von ihrem Wesen her klar ist, kann man sich der Systematik des Einmaleins zuwenden. Auch hier ist zwar das Ziel klar: das Auswendigkönnen der einfachen Mal-Rechnungen. Dies wird aber nicht erreicht durch das Auswendiglernen der sogenannten „Reihen“ (genauer müsste man „Folgen“ sagen). Vielmehr geht es um das Vertrautwerden mit der Mal-Landschaft. Kernidee ist hier, dass das Faktorisieren mehr Wert hat als das Ausmultiplizieren. Man kennt das Phänomen aus dem gymnasialen Algebraunterricht, wo es eine ganz einfache Aufgabe ist, ein gegebenes Produkt (beispielsweise $(x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1) = ?$) in eine Summe auszumultiplizieren, wogegen das Umgekehrte oft mit einem großen Aufwand verbunden ist: Faktoriere den folgenden Term: $x^4 + 1 = ?$ (Diese Aufgabe schaffen nicht einmal alle algebrafähigen Computer.) Noch vitaler betrifft uns die Tatsache, dass das Faktorisieren wertvoller ist als das Ausmultiplizieren, im Bereich der Verschlüsselungstechnik. Die RSA-Verschlüsselung, welche z.B. beim Internetbanking zur Anwendung kommt, basiert auf der Tatsache, dass auch die schnellsten Computer unserer Zeit bei einem gegebenen ausmultiplizierten Produkt von zwei riesigen Primzahlen nicht in der Lage sind, in vernünftiger Zeit die beiden Primzahlfaktoren zu finden. Somit kann das ausmultiplizierte Produkt öffentlich bekanntgegeben werden, welches man zum Verschlüsseln benützt. Zum Entschlüsseln braucht man aber die beiden Faktoren, welche nur dem Berechtigten bekannt sind.

Abb. 10: Einmaleins-Tafel

Diese wichtigen Eigenschaften der Produkte natürlicher Zahlen wirken bis in die Grundschuldidaktik hinein. Normalerweise wird in den Schulen den Kindern die berühmte Einmaleins-Tafel¹⁷ an die Wand gehängt oder in die Hand gegeben, in der die ersten 100 Einmaleinsrechnungen rhombisch zusammengestellt sind. Zu dieser Tafel existieren viele interessante Aufgabenvorschläge, welche zur Festigung des Einmaleins führen ohne stures Auswendiglernen der „Reihen“. Durch das Betonen der unausgerechneten Produkte birgt die Einmaleins-Tafel den stillschweigenden Appell, dass man diese Rechnung als Aufgaben ausrechnen soll. Im Gegensatz dazu steht die sogenannte Mal-Tabelle, in der nicht die Rechnungen, sondern die Resultate stehen und die zugehörigen

¹⁷ Aus: Das Zahlenbuch 2 (1996)

Produkte zu denken sind¹⁸. Sie verzichtet auf den Appell der Aufgabe und stellt vorerst nur einmal interessante Zahlen an interessanten Orten zusammen. Beim Betrachten der Mal-Tabelle tauchen also ganz andere Gedanken auf als bei der Einmaleins-Tafel. Sie eignet sich besonders gut, offene Aufträge zu initiieren, die nicht nur das schwierige Faktorisieren von gegebenen Produkten thematisieren, sondern auch die räumliche Vorstellungskraft aktivieren.

[illegible]

Abb. 11: Mal-Tabelle aus „Ich Du Wir 1 2 3“

Stellt man sich diese Mal-Tabelle als Boden eines räumlichen Gebildes vor und platziert in Gedanken auf jedes Resultatfeld eine Säule, welche die durch das Resultat angegebene Höhe hat, so entsteht die sogenannte Mal-Landschaft, in der vielfältige Bewegungen und Spiele möglich sind.¹⁹

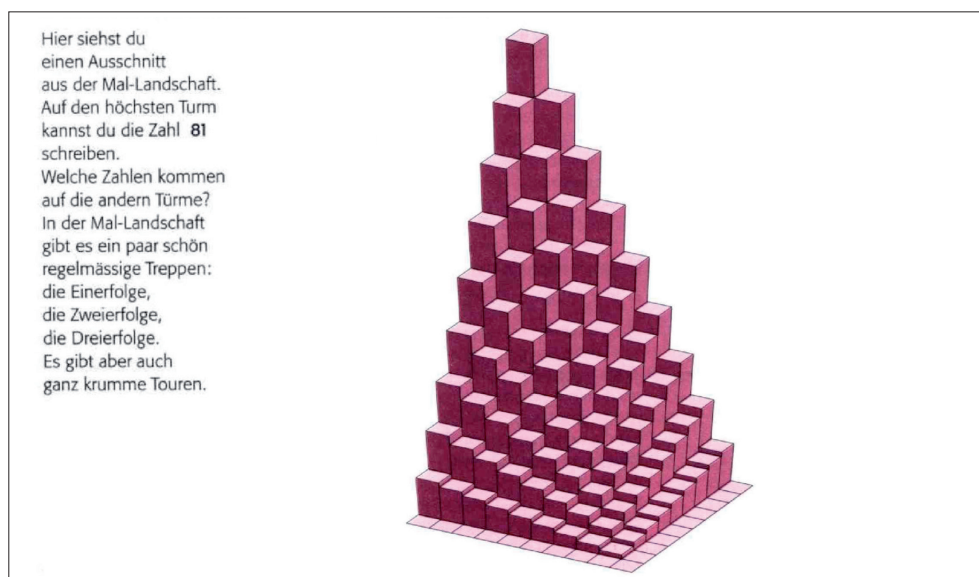


Abb. 12: Die Mal-Landschaft aus „Ich Du Wir 1 2 3“

18 Aus: „Ich Du Wir 1 2 3“, Seite 142.

19 Aus: „Ich Du Wir 1 2 3“. Seite 143.

Diese Landschaft ist tatsächlich mit einzelnen Säulen aus Holz realisiert worden. Dabei wird die Höhe der Säulen mit dem Querschnitt von 3 auf 3 Zentimetern in Einheiten von 6 Millimetern gemessen.²⁰ Obwohl die physische Realisierung ursprünglich gar nicht unsere Absicht war, zeigt es sich, dass die Arbeit mit diesen Holzklötzen sehr reichhaltig und spannend ist. Dies beginnt schon beim Aufstellen der Landschaft – ausgehend von einem ungeordneten Haufen von Holzklötzen – über die eigentliche Arbeit an entsprechenden Aufträgen zu dieser Landschaft bis zum ordentlichen Einsortieren der Klötze in einem Koffer. Dazu muss ein Verfahren gefunden werden, die ganze Landschaft in einen einzigen Quader umzuschichten. Exemplarisch soll hier der nicht ganz einfache Auftrag zur Mal-Landschaft aus „Ich Du Wir 1 2 3“ angegeben werden²¹. Zuvor werden im Haupttext des Buches drei „Wanderungen“ auf dem „Berg“ der Mal-Landschaft vorgeschlagen: Gratwanderung: (0, 1, 4, 9, 16, 25, ...), Wanderung an der Bergflanke: (0, 2, 8, 18, 32, ...) und Wanderung über den Bergrücken: (0, 7, 12, 15, 16, 15, 12, 7, 0).

Auftrag: Krumme Touren

- Trage drei Wanderungen mit drei Farben in die Mal-Tabelle ein: die Wanderung über den Grat, eine Wanderung an der Flanke und eine Wanderung über den Bergrücken. Du darfst die Zahlen von oben nehmen oder eigene Wege gehen. Vergiss aber nicht: Auf dem Tabellenboden muss der Weg schön gerade sein.
- •
Färbe auch den Weg 32, 35, 36, 35, 32 in der Mal-Tabelle. Kannst du ihn verlängern, als so: ..., 32, 35, 36, 35, 32, ... ? Wie hast du die Fortsetzung des Weges gefunden? Wie verändern sich die Höhen der Stufen?
- • •
Verlängere alle gefärbten Wege, soweit es geht. Schreibe alle Mal-Rechnungen der Wege der Reihe nach untereinander. Vergleiche die Rechnungen. Entdeckst du eine Regel?

Da die Holzklötze nicht angeschrieben werden, muss bereits beim Aufstellen der Landschaft laufend gerechnet werden. Und beim Auftrag „Krumme Touren“ werden laufend Multiplikationen im kleinen Einmaleins ausgeführt. Es werden Beziehungen hergestellt, die beim Auswendiglernen der „Reihen“ niemals ins Blickfeld geraten, beispielsweise, dass zwar $5+7 = 6+6$, jedoch $5 \cdot 7 = 6 \cdot 6 - 1$. (Alle Folgen, welche bei den krummen Touren entstehen, sind arithmetische Folgen zweiter Ordnung.) So besteht die Hoffnung, dass die elementaren Multiplikationen des Einmaleins mit guten Erlebnissen beim Bearbeiten der Aufträge verknüpft und so dauerhaft gelernt werden. Bezieht man das Konzept der Lieblingsrechnungen mit ein – das sind in der Landschaft die sogenannte Zaubertürme –, die man gut kennt und von denen aus man unangenehme Nachbarrechnungen erschließen kann, so wird die Mal-Landschaft zu einem belebten Spielfeld, wo es weniger darum geht, möglichst schnell eine Antwort auf eine Mal-Rechnung zu geben, als vielmehr die gegebene Mal-Rechnung spielerisch

20 Die Mal-Landschaft, wie auch die entsprechende Pluslandschaft, ist beim Walti Bräm Verlag zu beziehen: <http://www.wbv.ch/>

21 Analoge Aufträge sind auch im Zahlenbuch 2 (1996) zu finden.

abzuwandeln, so dass sie einem bequem wird. Zudem wird die Faktorenerlegung zu einem spontanen Reflex: „Was ist 56?“ „Aha, $7 \cdot 8$ oder auch $14 \cdot 4$ usw.“

Als Ausblick sei noch angefügt, dass die Mal-Landschaft zwanglos auch auf negative Faktoren ausgedehnt werden kann. Macht man dies konsequent, so ergibt sich eine gestufte Sattelfläche (parabolisches Hyperboloid mit der Gleichung $x \cdot y = z$) in der sofort in die Augen springt, dass „Minus mal Minus“ sicher „Plus“ ergeben muss.

Hier im Anschluss wird der Werbetext für die Mal-Landschaft wiedergegeben, welchen ich im Jahr 2004 für den Walti Bräm Verlag geschrieben habe.

Werbetext für die Mal-Landschaft (Walti Bräm Verlag)

(Peter Gallin, 1. 1. 2004)

Das Material

Die Mal-Landschaft besteht aus 81 Holzquadern mit je einer Grundfläche von 3cm x 3cm und den Höhen von 0.6cm bis 48.6cm, welche den Resultaten aller Einmaleins-Rechnungen von $1 \cdot 1$ bis $9 \cdot 9$ entsprechen. Eine Grundplatte mit Rand erlaubt es, die Holzquader schön ausgerichtet aufzustellen. Dabei entstehen 9 parallel nebeneinander stehende Treppen, welche den sogenannten Einmaleins-Reihen entsprechen. Von selbst ergeben sich nochmals 9 Treppen die senkrecht zu den ersten 9 Treppen verlaufen. So entsteht die Mal-Landschaft, in der verschiedenartige Bewegungen möglich sind, die alle dem autonomen Lernen und flexiblen Handhaben des Einmaleins in der zweiten und dritten Primarschulklasse dienen. Die Holzquader können in zwei mitgelieferten Kartonbehältern übersichtlich eingeräumt und zusammen mit der Grundplatte in einem Kunststoffkoffer verpackt werden. Einige Aufgaben und Aufträge zur Mal-Landschaft finden sich im Lehrmittel „ich du wir 1 2 3“ des Lehrmittelverlags des Kantons Zürich.

Die Lernziele

- Das Multiplizieren zweier einstelliger Zahlen soll zu einer selbstverständlichen Tätigkeit werden, die nie Selbstzweck bleibt, sondern zum Klären von bestimmten Fragestellungen und zum Entdecken von Gesetzmäßigkeiten notwendig ist.
- Durch das Nebeneinanderstehen der Einmaleins-Reihen sollen die Bezüge der Multiplikationsergebnisse und ihren Faktoren kreuz und quer erkennbar werden. Von der eindimensionalen Beschränkung auf eine bestimmte Reihe wird zu einer zweidimensionalen Beweglichkeit in der Mal-Landschaft aufgestiegen.
- Die Holzquader sind nicht angeschrieben und bieten deshalb neben dem Berechnen eines Produktes vor allem die Gelegenheit das höher stehende Faktorisieren, d.h. das Bestimmen der Faktoren bei gegebenem Produkt, zu üben.
- In Partner- oder Gruppenspielen können schließlich auch Schnelligkeitstests im Faktorisieren durchgeführt werden.
- Die Beschränkung auf die einstelligen Operanden von 1 bis 9 ruft von selbst nach einer gedanklichen Erweiterung der Landschaft, was nichts anderes bedeutet, als das Erzeugen einer mathematischen Vorstellung, die bis zum Multiplizieren von negativen Zahlen reichen kann.
- Aufstellen und Abräumen der Holzquader stellen zwei besondere Tätigkeiten dar, die systematisches Vorgehen und Durchhaltevermögen schulen.

Anforderungen beim Arbeiten mit der Mal-Landschaft

- Motorisches Geschick
- Systematisches Vorgehen
- genaues Abmessen, visuell oder manuell
- gutes Vergleichen
- die Fähigkeit Zahlen zerlegen zu können
- Teamfähigkeit
- Vorstellungsvermögen
- Kopfrechnen
- Zählkompetenzen
- Ausdauer
- Kreativität
- Aufmerksamkeit

Abschließend sei betont, dass das Vorhandensein einer konkreten Mal-Landschaft keine zwingende Notwendigkeit für das Einleben in die Welt des Einmaleins darstellt. Alle Aufträge können auch rein mit der gedanklichen Vorstellungskraft bearbeitet werden. Besonders wenn die betrachteten Zahlenfolgen über den Rand der Mal-Landschaft hinausgehen, wird die abstrakte Vorstellung gefordert und aktiviert. Egal ob mit oder ohne konkrete Realisierung gearbeitet wird, entscheidend ist, dass der spielerische Umgang mit den verschiedenen Mal-Rechnungen und der persönliche Bezug zu den einen oder anderen von ihnen im Vordergrund stehen. So wird das berühmte Zitat von Schiller: „Der Mensch spielt nur, wo er in voller Bedeutung des Wortes Mensch ist, und er ist nur da ganz Mensch, wo er spielt“ (Schiller, 1795) zu einem Motto für das Lernen des Einmaleins.

6 Termumformungen

Das Thema „Termumformungen“ weckt vielfach Erinnerungen an den gymnasialen Mathematikunterricht und stößt auf spontane Ablehnung. Oft wird gedacht, das sei kein Thema für die Grundschule. Dieses Vorurteil soll hier genauer angegangen werden, und es soll gezeigt werden, dass Termumformungen ein wunderbares Instrument des Dialogischen Mathematikunterrichts sind. Dieses Element der mathematischen Fachsprache kann tatsächlich in den Dienst einer entspannten, spielerischen und raschen Kommunikation im Unterricht verwendet werden. Dabei muss vorausgeschickt werden, dass Termumformungen in jedem Mathematikunterricht der Grundschule bereits heute schon verwendet werden, allerdings ohne sie als solche zu bezeichnen: Die Schreibweise $2 \cdot 3 = 6$ ist eine Termumformung. In diesem Zusammenhang ist es auch für die Kinder wichtig zu lernen, dass das Gleichheitszeichen „in beide Richtungen“ gelesen werden kann: 6 ist also auch $2 \cdot 3$, so wie $2 \cdot 3$ auch 6 ist. So wird denn auch vom „Gesicht“ einer Zahl gesprochen²²: Die Sechs hat viele Gesichter, z. B. „ $2 \cdot 3$ “ oder „ $12/2$ “, aber auch „6“ selbst. Die Schreibweise „6“ ist einfach das Sonntagsgesicht der Zahl Sechs.

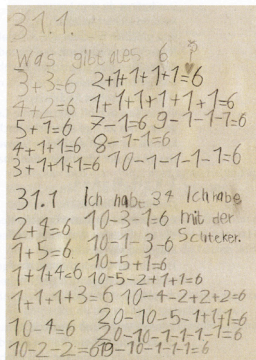
²² Aus: „Ich Du Wir 4 5 6“, Seite 37 f und Abb. 14.

Im Rahmen der Lehrbücher „Ich Du Wir 1 2 3“ und „Ich Du Wir 4 5 6“ wird das Thema Termumformungen schon früh angegangen und konsequent verfolgt. Es beginnt im ersten Buch in der ersten Klasse bei der Einführung des Gleichheitszeichens auf den Seiten 23 und 24. Kernidee des Gleichheitszeichens ist der gerechte Tausch von gleichwertigen Waren. Ab der Seite 146, nach der Thematisierung des Einmaleins und der Lieblingsrechnungen, mit deren Hilfe man unangenehmere Rechnungen auf angenehmere zurückführen kann, drängt sich eine längere Schreibweise für Multiplikationsaufgaben auf, beispielsweise bei der Rechnung $7 \cdot 8 = (8 \cdot 8) - 4 - 4 = 56$. Die Kinder werden im Auftrag „Rund um Resultate“ aufgefordert, zu einer vorgegebenen Zahl möglichst viele Rechnungen mit dieser Zahl als Resultat zu suchen. Das Beispiel auf Seite 148 zeigt, wie die Zweitklässlerin Regula 24 Rechnungen mit Plus und Minus zusammenstellt, welche alle das Resultat 6 haben. Damit schreibt sie Termumformungen hin, ohne dass sie hier schon als solche benannt werden, was aber durchaus möglich wäre. Wir zeigen hier die drei Seiten 148, 149 und 150 aus „Ich Du Wir 1 2 3“ (Abb. 13), welche zwar von Termumformungen handeln, vorerst aber nur die Notationsweise von Kettenrechnungen im Fokus haben. Auf Seite 150 passiert Regula ein Schreibfehler, der häufig – sogar noch bei Gymnasiasten – anzutreffen ist: Sie deutet das Gleichheitszeichen als gerichtetes Signal²³, welches von einer Aufgabe zu einer Lösung führt und schreibt:

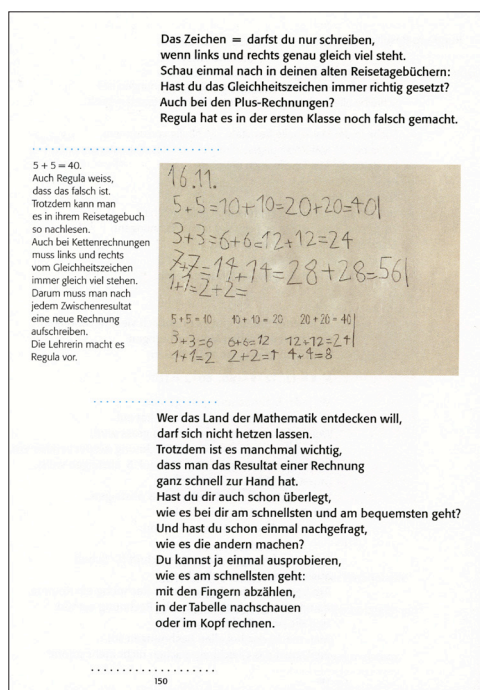
~~$$5 + 5 = 10 + 10 = 20 + 20 = 40$$~~

Die Lehrerin greift das Problem auf und weist sanft darauf hin, dass man in der Mathematik diese Aufgabe-Ergebnis-Deutung des Gleichheitszeichens nicht verwendet. Sie zeigt ihr, wie man die gleiche Rechnung korrekt notiert:

$$5 + 5 = 10; 10 + 10 = 20; 20 + 20 = 40$$

Regula hat in der Plus-Landschaft mit der 6 gespielt. Sie wollte wissen, wie viele Rechnungen es gibt, bei denen 6 das Resultat ist. Hat sie alle gefunden? Regula hat 24 Rechnungen gefunden, bei denen das Resultat immer 6 ist.  Gibt es auch Resultate, die du so gut kennst wie Regula? 100 Resultate findest du in unserer Plus-Tabelle. 100 Resultate in der Mal-Tabelle. Zu welchen Resultaten fallen dir Rechnungen ein? Fang mit den kleinen Zahlen an. Mit den kleinen Zahlen kann man auch grosse Rechnungen meistern. 148	Rund um Resultate Kennst du eine Zahl, die Resultat von vielen verschiedenen Mal-Rechnungen ist? Schreibe alle Rechnungen, die dir einfallen, ins Reisetagebuch. Suche in der Mal-Tabelle Resultate, die häufig vorkommen. Schreibe alle Mal-Rechnungen zum gleichen Resultat untereinander. Du darfst die Mal-Tabelle auch erweitern. Nimm das Resultat, zu dem du am meisten Rechnungen gefunden hast. Zu diesem Resultat gibt es noch viel mehr Rechnungen! Mach es so wie Regula mit der Sechs. Erfinde zu deinem Resultat ein paar lange Rechnungen mit Mal und Geteilt. Zu jedem Resultat gibt es unendlich viele Rechnungen. Aus lauter einfachen Mal-Rechnungen kann man eine lange Kette bauen: $3 \cdot 4 = 12$, $12 \cdot 5 = 60$, $60 \cdot 2 = 120$. Mit jeder Mal-Rechnung steigt man zu einem nächsten Zwischenresultat auf. Wenn dir das Zwischenresultat zu gross wird, kannst du es mit einer Geteilt-Rechnung wieder verkleinern. Wenn du zum Beispiel von 120 auf 5 absteigen willst, musst du 120 durch 24 teilen. Du kannst auch auf 6 oder auf 8 absteigen. Auf 7 kommst du nicht direkt, da musst du einen Umweg wählen. Kettenrechnungen kannst du Schritt für Schritt ausrechnen und aufschreiben. Am besten machst du nach jeder Rechnung ein Komma, damit man gut sieht, wo die alte Rechnung aufhört und die neue Rechnung anfängt. Man macht das bei allen Rechnungen so, weil sonst das Gleichheitszeichen nicht mehr stimmt. 149
---	--

23 Winter, H. (1982): mathematica didactica 5(4), 185-211.



.....
 Wie viele dreistellige Zahlen
 kann man aus den Ziffern 6, 7, 8 und 9 basteln?

.....

Terme spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle.
 Oft schreibt man **lange Ketten** von gleichwertigen Termen auf.
 Jeder Term zeigt ein anderes Gesicht vom immer gleichem Wert.
 Um herauszufinden,
 welches Gesicht man im Moment am besten gebrauchen kann,
 muss man sich die vielen Gesichter der Reihe nach anschauen.
 Versuch es doch auch einmal.
 Du kannst ja zum Beispiel alle Rechenwege,
 die dich zum Resultat 369 geführt haben,
 in einer Tabelle übersichtlich darstellen
 und miteinander vergleichen.
 Das sieht dann beinahe aus wie eine kleine Landkarte:
 eine Landkarte vieler Rechenwege,
 die alle zum gleichen Ziel führen.

$$3 \cdot 123 = 3 \cdot (120 + 3) = 3 \cdot 120 + 3 \cdot 3 = 3 \cdot 12 \cdot 10 + 9 = 36 \cdot 10 + 9 = 360 + 9 = 369$$

$$3 \cdot 123 = 3 \cdot 3 \cdot 41 = 9 \cdot 41 = (10 - 1) \cdot 41 = 10 \cdot 41 - 1 \cdot 41 = 410 - 41 = 369$$

$$3 \cdot 123 = 3 \cdot 3 \cdot 41 = 9 \cdot 41 = 9 \cdot (40 + 1) = 9 \cdot 40 + 9 \cdot 1 = 360 + 9 = 369$$

$$3 \cdot 123 = 3 \cdot (100 + 20 + 3) = 3 \cdot 100 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 3 = 300 + 60 + 9 = 369$$

.....

Bisher hast du dich vielleicht nur für das Resultat interessiert.
 Das Resultat ist das Sonntagsgesicht einer Rechnung.
 Hier kann man sich ausruhen.
 Man freut sich darüber,
 dass man nach einem anstrengenden Rechenweg
 endlich bei einem so makellosen Gebilde wie 369 landet.
 Aber warum sollen wir uns nur
 über dieses herausgeputzte Sonntagsgesicht freuen?
 Sieht der Term $9 \cdot 41$ nicht auch ganz hübsch aus?
 Er steht gleichberechtigt neben 369.
 Darum darfst du auch ein **Gleichheitszeichen**
 zwischen die beiden Terme setzen: $369 = 9 \cdot 41$.
 Beide Terme sind Gesichter von Dreihundertneunundsechzig:
 Sie zeigen diesen Wert bloss auf verschiedene Weise an.
 Zwei Terme, die du so mit einem Gleichheitszeichen verbindest,

44

Abb. 14: Seiten 38, 39 und 44 aus „Ich Du Wir 4 5 6“

Diese letzten paar Seiten können vorzugsweise bereits in der dritten Klasse besprochen werden. Die zugehörigen Aufträge machen den Kindern besonderen Spaß. Man erkennt, wofür die Termumformungen in der Grundschule dienlich sind: Es geht um eine einfache Notation von individuellen Rechenwegen. Das kommt besonders jenen Schülerinnen und Schülern entgegen, die sich schwer tun damit, ihre Gedanken aufs Papier zu bringen. Da ja der generelle Auftrag im Dialogischen Lernen stets heißt

„Schreibe auf, was du denkst und wie du vorgegangen bist“,

sind diese Schülerinnen und Schüler besonders gefordert und nehmen das Mittel der Termumformung als Gelegenheit wahr, ohne Worte trotzdem sagen zu können, wie sie vorgegangen sind. Damit wird ihre sprachlich-denkerische Fähigkeit indirekt geschult. Im Auftrag „Rechenwege aufschreiben“ (siehe Abb. 14), wird anhand eines Rechenwegs des Erstklässlers Giordano²⁴ zum ersten Mal bewusst dieses Mittel eingesetzt. Anstatt mühsam in einem Text auszudrücken, dass Giordano bei der Aufgabe $9 + 8 = ?$ von der 9 zuerst 5 wegnimmt und dann von der 8 auch 5 wegnimmt und so 10 erhält, zu der er nur noch 4 und 3 addieren muss, kann jetzt sein individueller Zehnerübergang, der die „Kraft der 5“ ausnützt, folgendermaßen geschrieben werden:

$$9 + 8 = (9 - 5 + 5) + (8 - 5 + 5) = (9 - 5) + 5 + (8 - 5) + 5 = 4 + 5 + 3 + 5 = 10 + 4 + 3 = 17$$

Es gibt selbstverständlich auch andere Möglichkeiten der Notation. Man ist ja in der moderneren Mathematikdidaktik bestrebt, den Kindern individuelle Wege zur Lösung gestellter Aufgaben zuzugestehen. Ein Ausdruck dafür ist auch das sogenannte „halbschriftliche Rechnen“, welches beispielsweise im Zahlenbuch 3 (Schweizer

24 Aus: „Ich Du Wir 1 2 3“, Seite 126.

Ausgabe, 1997) vorgestellt wird. Dabei werden gewisse Zwischenresultate oder Teilrechnungen, welche man durch Kopfrechnen ermittelt oder sich zurechtgelegt hat, unter die gestellte Aufgabe geschrieben (siehe Abb. 15). Daraus werden zum Teil schon fast Rätsel generiert, deren Entschlüsselungen an sich spannende Aufgaben für den Leser wären. Wenn nun aber im Dialogischen Mathematikunterricht die Lehrperson in der Regel sämtliche Journaleinträge der Kinder sichten sollte, stellen solche Rätsel eine unnötige Erschwerung ihrer Arbeit dar. Es gilt also abzuwägen, was pädagogisch wichtiger ist: Die Lektüre der Journale oder die individuelle Freiheit einer privaten Schreibweise. Solange das halbschriftliche Rechnen ein Mittel bleibt, individuelle Überlegungen zu einer nicht ganz im Kopf lösbaren Aufgabe im Privaten zu notieren, ist nichts dagegen einzuwenden. Sobald es aber um eine reibungslose Kommunikation geht, sollte – genauso wie im Sprachunterricht – eine Form bevorzugt werden, bei welcher der Leser nicht vor Probleme gestellt wird. So zeigt sich, dass das halbschriftliche Rechnen didaktisch gut gemeint ist, jedoch kommunikativ Schwierigkeiten bereitet. Die halbschriftlichen Notizen der Kinder sind bei komplexeren Fällen schwer lesbar und die Notationstechnik an sich im weiteren Verlauf der Mathematik – außer für den privaten Einsatz – unbrauchbar. Warum sollten die Kinder nicht früh eine Schreibweise kennenlernen, mit der sie erstens ihre individuellen Wege völlig frei beschreiten können, zweitens ihren Lernpartnern und Lehrpersonen das Leben nicht unnötig schwer machen und drittens auch noch Spaß dabei empfinden?

Florian rechnet:	Lisa rechnet:	Christian rechnet:
$347 + 256 = 500 + 90 + 13 =$	$347 + 256 = 547 + 56 = 597 + 6 =$	$347 + 256 = 603$
300 + 200 Hunderter plus Hunderter	Hunderter dazu	350 + 253
40 + 50 Zehner plus Zehner	Zehner dazu	400 + 203
7 + 6 Einer plus Einer	Einer dazu	

Abb. 15: Aus dem Zahlenbuch 3, Seite 37

Mit Termumformungen geschrieben, könnten die Rechnungen von Florian, Lisa und Christian²⁵ aus dem Zahlenbuch beispielsweise so aussehen:

Florian: $347 + 256 = 300 + 40 + 7 + 200 + 50 + 6 = 300 + 200 + 40 + 50 + 7 + 6 = 500 + 90 + 13 = 590 + 13 = 590 + 10 + 3 = 603$

Lisa: $347 + 256 = 347 + 200 + 56 = 547 + 56 = 547 + 50 + 6 = 597 + 6 = 603$

Christian: $347 + 256 = 347 + 3 + 256 - 3 = 350 + 253 = 350 + 50 + 253 - 50 = 400 + 203 = 603$

Schwieriger wird es bei Subtraktionen, die als Beispiele im Zahlenbuch aufgeführt sind.

²⁵ Nebenbei bemerkt: Vermutlich hat es diese Kinder nie gegeben!

Sandra rechnet: $\underline{265 - 127} = 100 + 40 - 2 = 138$		
200 - 100		Hunderter minus Hunderter
60 - 20		Zehner minus Zehner
5 - 7		Einer minus Einer
Melanie ergänzt nach oben:		
$\underline{265 - 127} = 3 + 130 + 5 = 138$		
130		
260		
265		
Pascal ergänzt nach unten:		
$\underline{265 - 127} = 65 + 70 + 3 = 138$		
200		
130		
127		

Abb. 16: Aus dem Zahlenbuch 3, Seite 40

Vielleicht wären solche Vorlagen geeignet für Aufträge, bei denen die Kinder beide Schreibweisen einander gegenüberstellen und Umwandlungen selbst generieren. Es ist eine spannende Aufgabe, die Beispiele aus Abbildung 16 in Termumformungen überzuführen. Dabei gibt es immer mehrere Möglichkeiten. Hier ein Vorschlag:

Sandra: $265 - 127 = 200 + 60 + 5 - 100 - 20 - 7 = 200 - 100 + 60 - 20 + 5 - 7 = 100 + 40 + 5 - 5 - 2 = 100 + 40 - 2 = 138$

Melanie: $265 - 127 = (127 + 3 + 130 + 5) - 127 = 3 + 130 + 5 = 138$

Pascal: $265 - 127 = 200 + 65 - 127 = 200 - 127 + 65 = 130 + 70 - 127 + 65 = 130 - 127 + 70 + 65 = 3 + 70 + 65 = 138$

Ein anspruchsvolles Beispiel soll hier die Tragweite des halbschriftlichen Verfahrens und seiner Beziehung zu Termumformungen aufzeigen: In einer Publikation von Sybille Schütte wird eine Notiz der Drittklässlerin Cecilia zur Aufgabe $35 \cdot 19 = ?$ abgebildet (siehe Abb. 17). Offenbar hat Cecilia hier eine brillante Leistung vollbracht. Natürlich hatte sie sich nicht die Aufgabe gestellt, jemanden über ihr Vorgehen bei der Multiplikation $35 \cdot 19 = ?$ genau ins Bild zu setzen, sondern sie wollte einfach nur das Resultat herstellen und hat ihre persönlichen Notizen stehen lassen. Sie kannte also weder das Verfahren des halbschriftlichen Rechnens noch dasjenige der Termumformung. Trotzdem können ihre Andeutungen als Herausforderung verstanden werden, genau nachzuvollziehen, was sie gedacht hat. Ich habe versucht, ihre knappen Hinweise in eine reguläre Termumformung umzuwandeln. In einfacheren Fällen wären das schöne Aufträge für die Kinder, insbesondere auch, weil jeweils nicht nur eine Antwort zwingend richtig ist. Mit Termumformungen erhält somit die unverbindliche Technik des halbschriftlichen Rechnens eine Fortführung, die viel Kreativität und Spannung erzeugt.

	$ \begin{aligned} 35 \cdot 19 &= \\ &= (30 + 5) \cdot 19 \\ &= 30 \cdot 19 + 5 \cdot 19 \\ &= 30 \cdot (10 + 9) + 5 \cdot (10 + 9) \\ &= 300 + 30 \cdot 9 + 50 + 45 \\ &= 300 + 30 \cdot (3 + 6) + 50 + 45 \\ &= 300 + (90 + 180) + 50 + 45 \\ &= 300 + 270 + 50 + 45 \\ &= 300 + 200 + 70 + 50 + 45 \\ &= 500 + 65 + 5 + 50 + 45 \\ &= 500 + 65 + 50 + 5 + 45 \\ &= 500 + 65 + 50 + 50 \\ &= 500 + 65 + 100 \\ &= 500 + 100 + 65 \\ &= 600 + 65 \\ &= 665 \end{aligned} $
--	---

Abb. 17: Cecalias halbschriftliches Verfahren und der Versuch einer Umschrift in eine Termumformung

Eine Passage aus „Ich Du Wir 4 5 6“ (Seite 46) begründet für die Kinder direkt, weshalb das Spiel mit Termumformungen sinnvoll ist: *Wenn du mit Termen spielen kannst, verlieren komplizierte Rechnungen ihren Schrecken. Du bewegst dich im unendlichen Raum der Zahlen wie ein Fisch im Wasser. Du kannst entscheiden, ob du ein Ziel auf dem direkten Weg ganz schnell ansteuern willst oder ob es interessanter ist, das Resultat so lang wie möglich hinauszuzögern, um die Landschaft rund herum in allen Einzelheiten zu erkunden.* Die Kollegin Ursula Duss hat für ihre Drittklässler folgende Ergänzungen verfasst:

Mathematik wird dann spannend, wenn man sich mit einer Rechnung oder einem mathematischen Problem lange, ausgiebig, aber auch spielerisch beschäftigt. Schnell das Resultat einer Rechnung zu haben, ist praktisch. Spannender ist es aber eigentlich, wenn man sich so richtig schön Zeit lässt ein Resultat herauszufinden. ... Mit der Termumformung kann man das Ergebnis herrlich heraus zögern. Der Weg wird lang, spannend und die Rechnung wird dabei immer einfacher.

Hier ein Beispiel:

$$567 + 45 = 560 + 7 + 45 = 560 + 7 + 40 + 5 = 560 + 40 + 7 + 5 =$$

$$600 + 5 + 7 = 600 + 5 + 5 + 2 = 600 + 10 + 2 = 600 + 12 = 612$$

Hast du gemerkt, was genau von einem Term zum nächsten passiert ist? Schreibe!

In den kleinen Schritten liegt das Spannende.

Versuche dasselbe mit der nachfolgenden Rechnung zu machen!

Wer findet wohl den weitesten Weg? $477 + 56 = \dots$

Suche solche Rechnungen im Mathematikbuch und löse sie mit Termumformungen. Selbstverständlich darfst du dir auch eigene Aufgaben stellen. An der Wandtafel findest du auch noch ein paar Beispiele.

Im Unterricht von Ursula Duss sind zahlreiche Beispiele entstanden, die belegen, dass die Kinder der dritten Klasse durchaus in der Lage sind, ihre individuellen Rechenwege

mit Termumformungen zu notieren (Produktion) und auch Termumformungen von Mitschülerinnen und Mitschülern zu lesen und zu beurteilen (Rezeption).

Hier ein Autograph, das zeigt, wie weite Wege sicher ans Ziel führen:

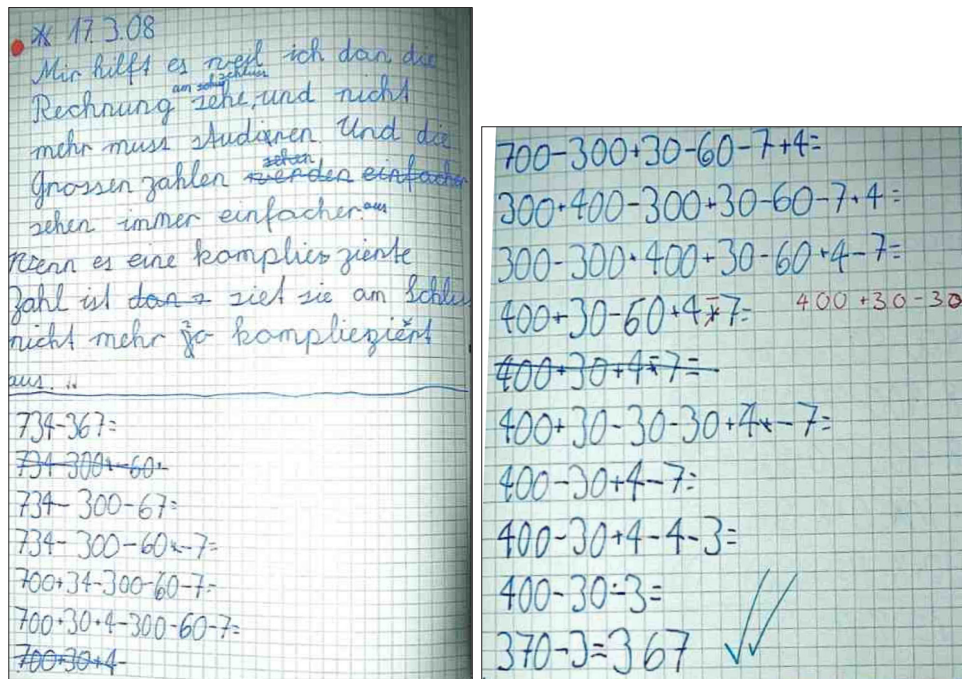


Abb. 18: Die Kinder sollen auch Stellung nehmen zum Wert von Termumformungen

In einem anderen Beispiel geschieht Cécile ein Fehler bei ihrer Termumformung:

Cécile schreibt: $676 - 498 = 600 + 74 - 498 = 600 + 74 - 400 - 98 =$
 $600 + 4 + 70 - 400 - 90 - 8 = 200 + 4 + 70 - 90 - 8 =$
 $200 + 4 + 20 - 8 = \dots$

Da in der Klasse eine gute kooperative Atmosphäre herrscht, ist es möglich auch Fehler zu thematisieren, ohne deren Urheber anzuprangern. So wird aus einem Fehler in Céciles Termumformung ein neuer Auftrag für die ganze Klasse. Der Auftrag lautet: *Schau dir Céciles Termumformung genau an! Was ist ihr passiert? Schreibe alles auf, was dir auffällt. Versuche die Rechnung zu lösen.* Und dies sind Antworten von zwei Kindern:

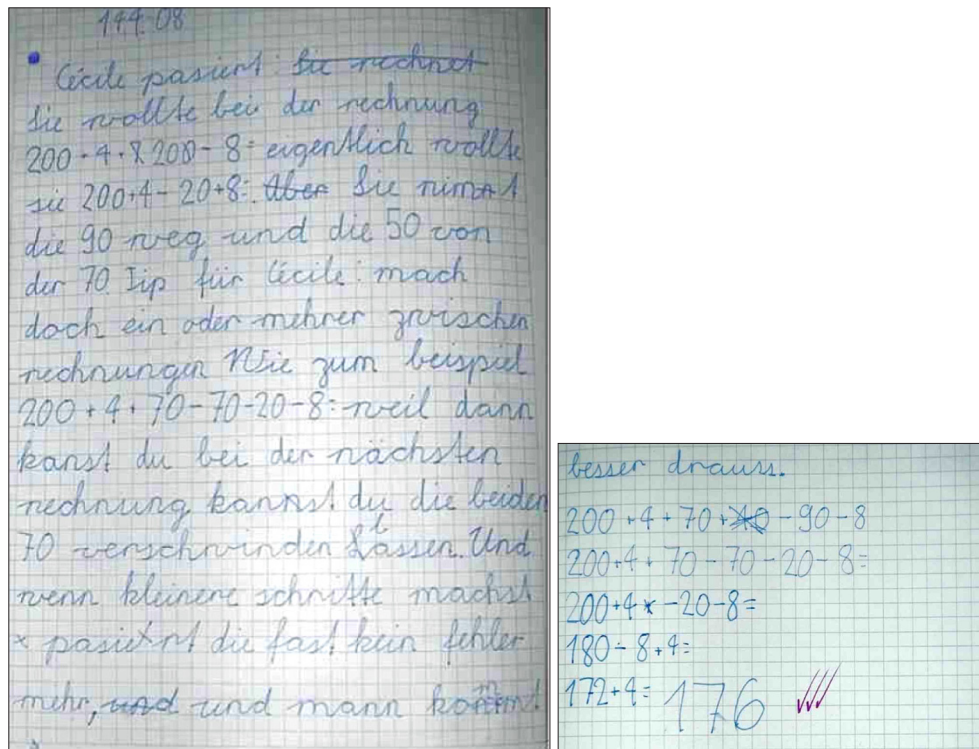


Abb. 19: Eine erste, explizite Antwort

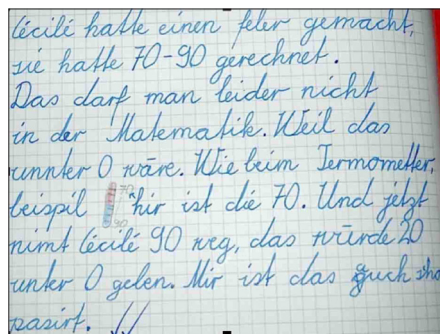


Abb. 20: Eine zweite, einfühlsame Antwort

Gerade Céciles Beispielaufgabe $674 - 498 = ?$ bietet sich an, nach eleganteren Lösungswegen zu suchen, indem beispielsweise der Subtrahend 500 einbezogen wird. Das könnte ein neuer Auftrag zum Notieren von Rechenwegen mittels Termumformungen an die ganze Klasse sein.

Die scheinbar engen Grenzen und klaren Regeln der Termumformungen mögen im Vergleich mit dem ganz freien halbschriftlichen Verfahren den Eindruck erwecken, dass man damit die Kreativität der Kinder einschränkt. Die gezeigten Beispiele widerlegen diese Vermutung. Im Gegenteil: Das System scheint die Kreativität erst recht anzukurbeln, denn es gibt immer wieder Kinder, welche in diesem Spiel die Sache auf die Spitze treiben. Ein Beispiel dafür stammt von Drittklässlerin Noemi aus dem Unterricht von Ursula Duss:

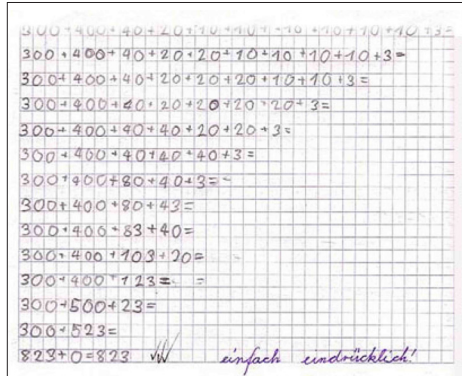


Abb. 21: Noemi übertreibt das Spiel mit Schalk und Freude

Bereits Goethe hat sich mit dem Problem der Kreativität im Rahmen enger Regeln auseinandergesetzt. Sein Sonett „Natur und Kunst“, dessen letzte beiden Zeilen besonders berühmt geworden sind, thematisiert die Freiheit, welche erst durch das Gesetz ermöglicht werde. Goethe hätte sich wohl kaum geträumt, dass sein Gedicht zu einem Plädoyer für Termumformungen herangezogen wird.

Natur und Kunst ²⁶

Natur und Kunst, sie scheinen sich zu fliehen
Und haben sich, eh man es denkt, gefunden;
Der Widerwille ist auch mir verschwunden,
Und beide scheinen gleich mich anzuziehen.

Es gilt wohl nur ein redliches Bemühen!
Und wenn wir erst in abgemeßnen Stunden
Mit Geist und Fleiß uns an die Kunst gebunden,
Mag frei Natur im Herzen wieder glühen.

So ist's mit aller Bildung auch beschaffen:
Vergebens werden ungebundene Geister
Nach der Vollendung reiner Höhe streben.

Wer Großes will, muß sich zusammenraffen;
In der Beschränkung zeigt sich erst der Meister,
Und das Gesetz nur kann uns Freiheit geben.

J.W. Goethe, 1802

26 [http://lyrik.no-ip.org/mediawiki/index.php/Sonett_\(Goethe\)](http://lyrik.no-ip.org/mediawiki/index.php/Sonett_(Goethe))

Literaturverzeichnis

- Das Zahlenbuch 2 (1996). Ausgabe für die Schweiz, Klett und Balmer AG, Zug.
- Das Zahlenbuch 3 (1997). Ausgabe für die Schweiz, Klett und Balmer AG, Zug.
- Das Zahlenbuch 4 (1998). Ausgabe für die Schweiz, Klett und Balmer AG, Zug.
- Gallin, P. (2010). Vom Zahlbegriff zum Längenmass, 4 bis 8 Fachzeitschrift für Kindergarten und Unterstufe, Nr. 3.
- Gallin, P., Ruf, U. (1999). Ich Du Wir 4 5 6, Sprache und Mathematik. Lehrmittelverlag des Kantons Zürich.
- Ruf, U., Gallin, P. (1995). Ich Du Wir 1 2 3, Sprache und Mathematik. Lehrmittelverlag des Kantons Zürich.
- Hess, K. (2002). Lehren – zwischen Belehrung und Lernbegleitung. Dissertation an der Universität Zürich. Download unter: <http://edudoc.ch/record/3008> [Zugriff: 30.7.2012].
- Piaget, J., Szeminska, A. (1965). Die Entwicklung des Zahlbegriffes beim Kinde. Stuttgart: Klett.
- Ruf, U., Keller, St., Winter, F. (Hrsg.) (2008). Besser lernen im Dialog, Dialogisches Lernen in der Unterrichtspraxis. Seelze: Klett/Kallmeyer Verlag.
- Ruf, U., Gallin, P. (1999, 4. Auflage 2011). Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, Band 1. Seelze: Klett/Kallmeyer Verlag.
- Schiller, F. (1795). Briefe über die ästhetische Erziehung des Menschen, 15. Brief.
- Schütte, S. (2004). Rechenwegnotationen und Zahlenblick. In: JMD, Heft 2.
- Schwank, I. (2003). Einführung in prädikatives und funktionales Denken. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), ZDM-Themenheft „Zur Kognitiven Mathematik“.
- Winter, H. (1982). Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. In: mathematica didactica 5(4).
- Zimmermann, S. (2012). Konstruktion versus Instruktion. Download unter: digibib.hs-nb.de/file/dbhsnb_derivate_0000001191/Bachelorarbeit-Zimmermann-2012.pdf [Zugriff: 30.7.2012].
- <http://www.wbv.ch/> [Zugriff: 30.7.2012].
- [http://lyrik.no-ip.org/mediawiki/index.php/Sonett_\(Goethe\)](http://lyrik.no-ip.org/mediawiki/index.php/Sonett_(Goethe)) [Zugriff: 30.7.2012].
- http://www.madipedia.org/index.php/Kategorie:Dissertationen_2000 [Zugriff: 30.7.2012].
- <http://www.gallin.ch> [Zugriff: 30.7.2012].

Verzeichnis externer Bildquellen

Die hier aufgeführten Seiten dieser Handreichung enthalten Bilder aus externen Quellen. Alle weiteren, nicht gesondert gekennzeichneten Abbildungen stammen von Peter Gallin.

S. 11

Abbildung 4: Bilder aus Wikipedia

Zollstock: © I. Grosjean

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/03/Metre_pliant_500px.png

Maßband: © S. A. Eugster

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5e/Tape_measure_colored.jpeg

S. 14

Abbildung 8: © C. Schneider, Pädagogische Hochschule Karlsruhe

Abbildung 9: Aus „Ich Du Wir 4 5 6“, 1999, S. 93. Abdruck mit freundlicher Genehmigung des Lehrmittelverlags Zürich.

S. 18

Abbildung 10: Aus „Das Zahlenbuch 2“, 1996. Abdruck mit freundlicher Genehmigung der Klett und Balmer AG, Zug.

S. 19

Abbildungen 11 u. 12: Aus „Ich Du Wir 1 2 3“, 1995, S. 142/143. Abdruck mit freundlicher Genehmigung des Lehrmittelverlags Zürich.

S. 23/24

Abbildung 13: Aus „Ich Du Wir 1 2 3“, 1995, S. 148-150. Abdruck mit freundlicher Genehmigung des Lehrmittelverlags Zürich.

S. 24/25

Abbildung 14: Aus „Ich Du Wir 4 5 6“, 1999, S. 38, 39 u. 44. Abdruck mit freundlicher Genehmigung des Lehrmittelverlags Zürich.

S. 26

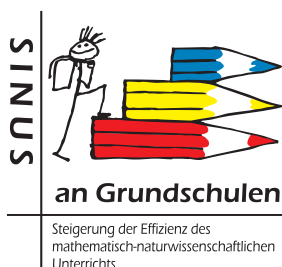
Abbildung 15: Aus „Das Zahlenbuch 3“, 1997, S. 37. Abdruck mit freundlicher Genehmigung Abdruck mit freundlicher Genehmigung der Klett und Balmer AG, Zug.

S. 27

Abbildung 16: Das Zahlenbuch 3“, 1997. S. 40. Abdruck mit freundlicher Genehmigung des Klett und Balmer Verlags, Zug.



Programmträger: IPN, Kiel
Projektleitung: Prof. Dr. Olaf Köller
www.ipn.uni-kiel.de



SINUS an Grundschulen
Projektkoordination am IPN: Dr. Claudia Fischer
Tel. +49(0)431/880-3136
cfischer@ipn.uni-kiel.de
www.sinus-an-grundschulen.de

Ministerium für Bildung
und Wissenschaft
des Landes Schleswig-Holstein



Programmkoordination für die Länder durch das
Ministerium für Bildung und Wissenschaft
des Landes Schleswig-Holstein (MBW)
Dr. Kai Niemann
www.schleswig-holstein.de/MBW/DE/MBW_node.html



Serverbetreuung: Deutsches Institut für Internationale
Pädagogische Forschung (DIPF)
www.dipf.de

ISBN für diese Handreichung
978-3-89088-225-3