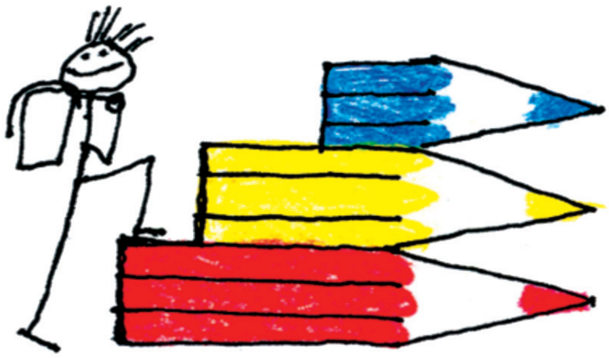
Handreichungen des Programms *SINUS an Grundschulen*

Mathematisches Lernen von Anfang an

Kompetenzorientierte Förderung im Übergang Kindertagesstätte – Grundschule

Hedwig Gasteiger



SINUS an Grundschulen

Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

Mathe

Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Impressum

Hedwig Gasteiger
Mathematisches Lernen von Anfang an
Kompetenzorientierte Förderung im Übergang
Kindertagesstätte – Grundschule

Publikation des Programms *SINUS an Grundschulen*
Programmträger: Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) an der Universität Kiel
Olshausenstraße 62
24118 Kiel
www.sinus-an-grundschulen.de

Projektleitung: Prof. Dr. Olaf Köller
Projektkoordination: Dr. Claudia Fischer
Redaktion u. Realisation dieser Publikation:
Brigitte Dedekind, Verena Hane
Kontaktadresse: info@sinus-grundschule.de

ISBN: 978-3-89088-218-5

Nutzungsbedingungen

Hedwig Gasteiger

Mathematisches Lernen von Anfang an

Kompetenzorientierte Förderung im Übergang Kindertagesstätte – Grundschule

Mathematisches Lernen im Übergang Kindertagesstätte – Grundschule ist ein in den letzten Jahren viel diskutiertes Thema. Es wurde erkannt, wie wichtig ein guter diagnostischer Blick auf die mathematischen Fähigkeiten im Übergangsbereich ist, um Kindern ein anschlussfähiges und erfolgreiches Weiterlernen zu ermöglichen. In dieser Handreichung sollen Beobachtungs- und Fördermöglichkeiten in wichtigen mathematischen Lernbereichen im Übergang von der Kindertagesstätte zur Schule mit Beispielen angesprochen werden, vorab erfolgt jedoch eine kurze Analyse der Ausgangslage zu diesem Themenbereich.

1 Ausgangslage

1.1 Entwicklung mathematischer Kompetenzen vor Schuleintritt

Kinder entwickeln von den ersten Lebensjahren an bis zum Zeitpunkt der Einschulung beträchtliche mathematische Fähigkeiten. Wie man aus der Säuglingsforschung weiß, können Kinder bereits früh Mengen mit zwei von Mengen mit drei Elementen unterscheiden. Die Schlüsse zog man aus zahlreichen Experimenten, bei denen man die Aufmerksamkeitsspanne von Säuglingen über die Zeitdauer gemessen hat, in der die Kinder ihren Blick auf einen Gegenstand fixiert hielten. Gewöhnen sich Säuglinge an einen gewissen Anblick, so verringert sich die Zeit, in der sie fokussiert betrachten. Die Blickdauer bleibt unverändert kurz, wenn Bilder präsentiert werden, die für das Kind keinen neuen Reiz darstellen. Sie fixieren jedoch wieder deutlich länger, wenn ein dargebotener Reiz eine für sie wahrgenommene Veränderung oder ein unerwartetes Ereignis bedeutet. Auf diese Weise konnte man auch feststellen, dass Kinder bereits früh Informationen über Mengenveränderungen verarbeiten. Wenn zu einer Puppe versteckt eine zweite dazugelegt wird, erwarten die Kinder auch, dass sie zwei Puppen sehen. Sie reagieren mit einem fokussierten Blick, wenn ihnen stattdessen nur eine Puppe gezeigt wird (zum Nachlesen u.a. in Devlin 2005). Das ist für sie offensichtlich ein unerwartetes Ergebnis.

In den Lebensjahren vor Schuleintritt lernen die Kinder außerdem – in der Regel ohne dass man sie dies explizit lehrt – die durchaus komplexe Tätigkeit des Zählens. Dadurch können sie auch erste Zählstrategien entwickeln, mit denen sie einfache Additions- und Subtraktionsaufgaben in ihnen bekannten Kontexten lösen können (z.B. Du hast 5 Bonbons und bekommst noch zwei geschenkt. Wie viele hast du dann?).
Grundlegende mathematische Kompetenzen erwerben Kinder nicht nur zu Zahlen, Mengen und ersten Operationen, sondern z.B. auch im Vergleichen, Ordnen und Sortieren geometrischer Figuren. In der Regel erkennen die Kinder zunächst typische Repräsentanten geometrischer Formen. Die Begriffsbildung vor allem bei Dreiecken und Vierecken ist jedoch keinesfalls abgeschlossen (vgl. Clements 2004). Vor allem im Größenbereich Längen können Kinder bereits über erste Vorstellungen zum Messen verfügen und Maßangaben interpretieren (vgl. Schmidt, Weiser 1986).

1.2 Bildungspolitische Vorgaben zu frühem mathematischem Lernen

Mathematischer Bildung im vorschulischen Bereich wurde im Verlauf der Geschichte unterschiedlich hohe Bedeutung beigemessen. In den letzten Jahrzehnten wechselten sich Phasen, in denen das emotionale und soziale Lernen deutlichen Vorrang vor fachlichem Lernen hatte, mit Phasen ab, in denen fachliche Frühförderung auch in den Kindertagesstätten gefordert wurde.
Die bis heute anhaltende Hochphase mathematischer (und auch anderer fachlicher) Bildung im vorschulischen Bereich ist unter anderem eine Konsequenz der Veröffentlichung der ersten PISA-Ergebnisse. Es wurden Zusammenhänge zwischen der Dauer des Kindergartenbesuchs und der mathematischen Kompetenz 15-jähriger Jugendlicher festgestellt (Prenzel et al. 2004, S. 275). In der Jugendministerkonferenz wurde daraufhin im Jahr 2004 fachliche – und infolgedessen auch mathematische – Bildung sowie die Beobachtung und Dokumentation in den verschiedenen Bildungsbereichen als klare Aufgaben der Bildungsarbeit im vorschulischen Bereich festgeschrieben.
So entstanden in allen Bundesländern nach und nach Bildungspläne für den Elementarbereich, die jedoch sehr unterschiedlich ausgestaltet sind. Es gibt Bildungspläne, die sich an fundamentalen Ideen der Mathematik orientieren, die ausführlich Leitgedanken, Ziele und Umsetzungsmöglichkeiten beschreiben (z.B. Rahmenplan Mecklenburg-Vorpommern), und auch Pläne, in denen sich die Aussagen zur Mathematik auf wenige Sätze beschränken (z.B. Rahmenplan Bremen). Dabei muss man bedenken, dass die Entwicklung von Bildungsplänen für den vorschulischen Bereich für viele Bundesländer ein Novum war und dass es – im Gegensatz zur Lehrplanentwicklung – kaum Orientierungsmöglichkeiten und auch kaum verlässliche Erfahrungswerte gab, auf die man zurückgreifen konnte. Es ist zu erwarten, dass sich in einer zweiten Generation von Bildungsplänen mehr Ähnlichkeiten in den Strukturen und Inhalten zeigen werden.

1.3 Materialangebot

Mittlerweile gibt es ein beträchtliches Angebot an Materialien zur mathematischen Bildung und Förderung im Übergangsbereich Kindertagesstätte-Grundschule. Die

vorliegenden Veröffentlichungen unterscheiden sich deutlich in ihrer Zielsetzung und Qualität und lassen sich grob gliedern in Lehrgänge, Trainingsprogramme, Ideensammlungen oder konzeptionelle Vorschläge. Lehrgänge und Trainingsprogramme (wie z.B. das sehr weit verbreitete ‚Zahlenland' (Preiß 2006 bzw. Friedrich, de Galgóczy 2004)) geben klare Einheiten vor, die in eher verschulter Art konzipiert sind, Ideensammlungen (z.B. Hoenisch, Niggemeyer 2004, Benz 2010) lassen die konkrete Planung mathematischer Lerngelegenheiten und die Integration in die tägliche Arbeit komplett in der Hand der Erziehenden und konzeptionelle Vorschläge (wie z.B. Wittmann, Müller 2009) versuchen für die Erziehenden einen Rahmen aufzuzeigen, wie elementare mathematische Bildung integriert in den Alltag der Kindertagesstätte ablaufen kann.
Problematisch ist, dass einige Lehrgänge und Trainingsprogramme fachliche Unsauberkeiten und eine sehr eingeschränkte Sichtweise auf das Fach Mathematik aufweisen. Vor allem der Rückgriff auf vermeintlich kindgerechte Einkleidungen führt dazu, dass keine tragfähigen Vorstellungen von Zahlen und Mengen aufgebaut werden (z.B. zu erkennen, dass ‚zwei' eins weniger ist als ‚drei' liegt nicht nahe, wenn man die Zahl ‚zwei' als ‚Person' kennenlernt, die eine Brille trägt und immer alles zweimal sagt). Der wichtigsten Intention sich mit mathematischer Bildung im Übergangsbereich auseinanderzusetzen, nämlich Reibungsverluste bei Lernprozessen im Übergang zu minimieren, kann so nicht Rechnung getragen werden – im Gegenteil: Es ist zu befürchten, dass sich die mangelnde Kohärenz ungünstig auf das mathematische Weiterlernen auswirkt.
Anschlussfähiges Mathematiklernen kann bereits in Kindertagesstätten hervorragend gelingen, wenn Alltagssituationen mit mathematischem Bezug sowie das kindliche Spiel genutzt werden und die Erziehenden die Kinder in ihrem Lernprozess durch ein mathematisch anregungsreiches Umfeld unterstützen (vgl. Gasteiger 2010).

1.4 Bedeutung mathematischer Bildung im Übergang

Wie wichtig die Auseinandersetzung mit mathematischer Bildung im Übergangsbereich Kindertagesstätte-Grundschule ist, wird durch zahlreiche Forschungsergebnisse bestätigt, die belegen, dass das in der Vorschulzeit erhobene mathematische Vorwissen einen deutlicheren Einfluss auf die Leistungen in der Grundschulzeit zeigen als z.B. Intelligenz (z.B. Dornheim 2008). Daraus resultiert die Forderung, Kinder bereits in vorschulischen Institutionen bestmöglich zu fördern und – wenn nicht bereits vorher geschehen – spätestens zu Schulbeginn die notwendigen Maßnahmen zu ergreifen, damit individuelle Lernrückstände unabhängig von den dafür vermuteten Gründen so gut wie möglich aufgeholt werden können.
Ein anderer Aspekt, der die Notwendigkeit der Auseinandersetzung mit mathematischer Bildung im Übergang unterstreicht, ist die Tatsache, dass nicht abgestimmte inhaltliche Anforderungen in verschiedenen Bildungseinrichtungen, die Kinder durchlaufen, zu Brüchen im Lernprozess führen können. Nicht tragfähige Vorstellungen, die sich aufgrund spezifischer didaktischer Zugänge zu mathematischen Themen entwickeln können, sind mitunter hartnäckig verankert und können anschlussfähiges Lernen deutlich erschweren.

2 Herausforderung für Erziehende und Lehrkräfte

Zwar weiß man um zahlreiche mathematische Kompetenzen, die sich bereits früh entwickeln, allerdings können diese zum Schuleintritt beileibe nicht bei allen Kindern vorausgesetzt werden. Die Gründe für die große Heterogenität in den mathematischen Leistungen sind vielfältig. Da man die Bedeutung und auch die Vorhersagekraft mathematischen Vorwissens für späteres Mathematiklernen erkannt hat, haben sich Erziehende und Lehrkräfte einer großen Herausforderung zu stellen.
Die Forderung nach frühzeitiger, passgenauer Förderung steht berechtigterweise im Raum. Dazu ist es notwendig, sich vorab einen Überblick über die individuellen Kompetenzen der Kinder zu verschaffen. Folgende und ähnliche Fragestellungen bewegen dazu den verantwortlichen Personenkreis: Was können die Kinder in meiner Gruppe/ Klasse? Wie sind die Leistungen einzuschätzen? Wann besteht zwingender pädagogischer Handlungsbedarf? Wie sieht geeignete, der Sache und dem Kind angemessene Förderung aus?
Um diese Fragen anzugehen, ist es unabdingbar, in den entsprechenden Teilbereichen, die als zentral für mathematisches Weiterlernen gelten, einen guten Einblick in die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten zu haben. Dies wiederum erfordert geeignete Aus- und Fortbildungsangebote für Erziehende und im Übergangsbereich tätige Lehrkräfte, die neben Fachkompetenz auch pädagogische Handlungskompetenz in den Mittelpunkt rücken. So können Entwicklungsverzögerungen bei Kindern hoffentlich frühzeitig erkannt und pädagogische Entscheidungen getroffen werden, die das Kind individuell und fachlich angemessen fördern.

3 Meilensteine in der mathematischen Entwicklung im Übergang: Hintergründe, Leistungsspektrum, Fördermöglichkeiten

Da vor allem dem Zahlenvorwissen erheblich größere Vorhersagekraft für spätere Rechenleistungen zugeschrieben wird als der Intelligenz, beschränken sich die folgenden Abschnitte auf die in diesem Zusammenhang bedeutsamen elementaren mathematischen Kompetenzen Zahlwortreihe, Zählen und Blick für Strukturen (weitere hier zu nennende Kompetenzen wären das sich entwickelnde Verständnis für Anzahlen bzw. Mengen und für Mengenzerlegungen) (vgl. Dornheim 2008). In jedem Abschnitt wird das für die Diagnose notwendige Hintergrundwissen zur Entwicklung der jeweiligen Kompetenz thematisiert, ein Einblick in das heterogene Leistungsspektrum gegeben, und es werden Fördermöglichkeiten angesprochen. Die Aussagen über das Leistungsspektrum werden auf der Grundlage einer Untersuchung von Kindergartenkindern in zwei verschiedenen Bundesländern getroffen (Gasteiger 2010), sie sind aber in ähnlicher Weise auch in zahlreichen anderen Untersuchungen nachzulesen (exemplarisch z.B. Hasemann 2007; Schmidt, R. 1982).

3.1 Zahlwortreihe

Spricht man von ‚zählen können', so werden darunter eigentlich zwei verschiedene Kompetenzen gefasst. Die Frage ‚Kannst du schon zählen?' zielt zunächst oftmals darauf ab, die Zahlwortreihe möglichst fehlerfrei aufzusagen. ‚Zählen können' beinhaltet aber eigentlich die komplexe Tätigkeit, mit Hilfe der Zahlwortreihe bestimmen zu können, wie viele Elemente eine beliebig vorgegebene Menge hat (vgl. hierzu den folgenden Abschnitt ‚resultatives Zählen'). Diese beiden Kompetenzen werden im Folgenden getrennt betrachtet. Zunächst soll es erst einmal um das Beherrschen der Zahlwortreihe gehen.

Kinder sind bereits relativ früh in der Lage, Zahlwörter von anderen Wörtern zu unterscheiden, sie verwenden sie zunächst aber oftmals nicht in der richtigen Reihenfolge. Folgende Schritte können beim Erlernen der Zahlwortreihe beobachtet werden (vgl. Fuson 1988):

- Zahlwortreihe als Ganzheit: Anfangs wird die Zahlwortreihe – ähnlich wie ein Gedicht – in einer Ganzheit gelernt. Einzelne Wörter werden noch nicht als solche erkannt. Die Kinder sehen ‚einszweidreivierfünf' als zusammenhängendes Ganzes an wie etwa ‚AllemeineEntchen'.
- Unflexible Zahlwortreihe: Jedes Zahlwort wird zwar von den anderen getrennt, die richtige Reihenfolge kann aber trotzdem nur produziert werden, wenn das Kind mit ‚eins' beginnt, die Zahlwortreihe aufzusagen.
- Teilweise flexible Zahlwortreihe: In dieser Entwicklungsphase kann von jedem beliebigen Zahlwort weitergezählt werden. Jedes Wort wird getrennt von anderen Zahlwörtern wahrgenommen und es kann ohne Schwierigkeiten das nachfolgende und das vorausgehende Zahlwort genannt werden. Es gelingt, von einer bestimmten Zahl bis zu einer vorgegebenen Zahl zu zählen. In dieser Phase entwickelt sich auch die Fähigkeit rückwärts zu zählen.
- Flexible Zahlwortreihe: Jedes Zahlwort in der Reihe wird als Einheit aufgefasst, die wiederum selbst gezählt werden kann (z.B. ‚Zähle von der 5 drei Schritte weiter.'). Dadurch ist mit dem Weiterzählen um eine vorgegebene Anzahl von Schritten eine Zählstrategie zur Lösung von Additionsaufgaben möglich.
- Vollständig reversible Zahlwortreihe: Auf diesem Niveau können Kinder von beliebigen Zahlwörtern beginnend zügig vorwärts und rückwärts zählen. Das Rückwärtszählen ist von großer Bedeutung, um erste Subtraktionsaufgaben zählend lösen zu können.

Bei Schuleintritt muss man damit rechnen, dass es Kinder gibt, die die Zahlwortreihe noch nicht bis zehn beherrschen und andere, die bereits fehlerfrei bis hundert und darüber hinaus zählen können. Außerdem ist davon auszugehen, dass die Zahlwortreihe noch nicht bei allen Kindern flexibel ist bzw. dass rückwärts oder weiterzählen nicht gelingt.

Reflexion und Schulung der eigenen Wahrnehmung:
Welche Auffälligkeiten erkennen Sie bei den Kindern? In welcher Phase der Entwicklung der Zahlwortreihe befinden sie sich? Welche Probleme könnten sich für das schulische Weiterlernen ergeben bzw. wie beurteilen Sie die Kompetenzen?

Maritta:
I: „Wenn wir bei der ‚fünf' anfangen, kannst du dann weiterzählen? ... fünf..."
M: „fünf, ... sechs, ... sieben, ... acht" (10 Sekunden Pause) „nee, noch mal: fünf, ... sechs, ... sieben, ... acht, ... neun, ... elf, ... zwölf?"

Marie-Lisa:
Sie zählt zunächst von 1 an fehlerfrei bis 88:
M: „89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100!"
I: „Boah! Und was kommt dann? Weißt du das auch?"
M: „einhundert, zweihundert, dreihundert, vierhundert, fünfhundert, sechshundert, siebenhundert, achthundert, neunhundert, zehnhundert – das reicht jetzt!"

Suat:
I: „Wenn wir bei der ‚fünf' anfangen, kannst du dann weiterzählen?"
S: „Ne!"
I: „Das geht dann so: fünf, sechs, sieben..."
S: (3 Sekunden Pause) „fünf, sechs, sieben..." (5 Sekunden Pause)
I: „Was kommt dann?"
S: „Die neun..."
...
I: „und nach der neun?" (15 Sekunden Pause) „Ok! Kannst du denn auch-"
S: „Die 10!"
...
I: „Kannst du denn – wenn wir bei der ‚zehn' anfangen – rückwärts zählen?"
S: „Ne!"
I: „Das geht dann so: 10, 9, 8..."
S: „acht, null" (15 Sekunden Pause) „null, sechs, acht!"

Das Interview mit Marie-Lisa offenbart beim Weiterzählen von 100 aus ein typisches Phänomen. Zur weiteren Interpretation und Information wird hier aus Platzgründen auf Spiegel, Selter 2003, S. 12f. verwiesen.
Um die Zahlwortreihe zu festigen, eignen sich als Fördermöglichkeiten Abzählverse, Reime oder Lieder (s. z.B. Dolenc, u.a. 2005; Metcalf, Röckener 2005). Auch sollten viele Zählsituationen im Alltag möglichst gemeinsam genutzt werden (z.B. anwesende Kinder zählen – das kann auch einmal rückwärts erfolgen. Dann ergibt sich unter Umständen eine spannende Frage: Jetzt sind wir bei 3 angekommen, was heißt das jetzt? Wie viele Kinder fehlen denn heute?).

3.2 Resultatives Zählen

Unter resultativem Zählen versteht man die Fähigkeit, mit Hilfe der Zahlwortreihe die Anzahl einer beliebigen Menge von Gegenständen richtig angeben zu können. Damit dies gelingen kann, müssen eine Reihe von Teilfähigkeiten koordiniert werden, die nicht trivial sind (vgl. Gelman, Gallistel 1986). Man spricht in diesem Zusammenhang auch von den Zählprinzipien:

- Eineindeutigkeitsprinzip: Jedes Element wird beim Zählen nur einmal berücksichtigt. Gegen dieses Prinzip wird verstoßen, wenn Zahlwörter mehrfach verwendet werden, wenn mitten im Zählprozess Elemente mehrfach gezählt oder ausgelassen werden und wenn z.B. bei zweisilbigen Zahlwörtern jeder Silbe ein zu zählendes Objekt zugewiesen wird: Es wird bei ‚sie-ben' auf zwei verschiedene Elemente gedeutet.
- Prinzip der stabilen Ordnung: Die Zahlwörter müssen in einer gleichbleibenden, jederzeit wiederholbaren Reihenfolge verwendet werden.
- Kardinalprinzip: Um das Zählergebnis richtig angeben zu können, muss die Konvention verstanden sein, dass das letzte Zahlwort die Anzahl der Menge angibt.
- Abstraktionsprinzip: Die ersten drei Prinzipien kann man auf jede Art von Objekten anwenden, d.h. es können lauter gleiche Objekte, aber auch vollkommen verschiedene Gegenstände mit Hilfe der gleichen Prozedur gezählt werden.
- Prinzip der Irrelevanz der Anordnung: Die Reihenfolge, in der die Elemente gezählt werden, hat keine Auswirkung auf das Zählergebnis. Auch ändert sich ein Zählergebnis nicht, wenn die Gegenstände beim Zählen berührt oder verschoben werden.

Anfangs imitieren Kinder Bewegungen, die sie bei Erwachsenen beobachten: sie zeigen z.B. in die Luft, während sie Zahlworte nennen. Dann zeigen sie durchaus auf Objekte, gehen dabei aber nicht immer strukturiert vor. Die Eins-zu-Eins-Zuordnung von Zahlwort und zu zählendem Objekt wird gelernt, gelingt aber nicht immer. Typische Zählfehler sind hier, dass zweisilbigen Zahlwörtern, z.B. der ‚drei-zehn', zwei Objekte zugeordnet werden, aber auch, dass Objekte übersehen oder mehrfach gezählt werden. Generell kann beobachtet werden, dass das Zählen kleiner und/oder strukturiert dargebotener Mengen besser gelingt, als das Zählen großer, vor allem unstrukturiert präsentierter Mengen. Vor allem bei unstrukturiert dargebotenen Mengen ist die Strategie des Verschiebens der Elemente, die bereits gezählt sind, sehr hilfreich, um zum richtigen Zählergebnis zu gelangen. Diese Strategie kann ebenfalls über Imitation gelernt werden, es ist jedoch durchaus legitim, sie den Kindern bewusst zu machen, indem man sie den Zählprozess auf diese Weise beobachten lässt und vor allem die Vorteile dabei diskutiert.

Man kann als Lehrkraft nicht davon ausgehen, dass die Eins-zu-Eins-Zuordnung von Zahlwort und zu zählendem Element von allen Kindern sicher beherrscht wird. Ist dies nicht der Fall, kann es bereits in den ersten Schulwochen, wenn es um Mengenbildungen und Menge-Ziffer-Zahlwortzuordnungen geht, zu erheblichen Schwierigkeiten kommen. Wie kann die Mengenvorstellung zu einer Zahl gelingen, wenn beispielsweise beim Zählen der Menge einmal das Ergebnis 8 ermittelt wird und einmal das Ergebnis 7?

Andererseits gibt es auch Kinder, die große, unstrukturiert dargebotene Mengen z.B. in Zweierschritten zählen können oder zügig zählen, indem sie die Zahlwortreihe leise für sich aufsagen und lediglich das Ergebnis nennen.

Reflexion und Schulung der eigenen Wahrnehmung:
Welche Kompetenzen und welche Auffälligkeiten erkennen Sie bei den beiden Schulanfängern? Beziehen Sie sich dabei auf die obengenannten Zählprinzipien. Wo sehen Sie wichtige Hinweise für das schulische Weiterlernen?
Auf dem Tisch liegen 21 ungeordnete Muggelsteine, die gezählt werden sollen.

Rania:
R. beginnt zu zählen: „Eins, zwei, drei" (Dabei tippt sie mit jedem Zahlwort einen anderen Stein an). „Warte" (Sie nimmt nun Stein für Stein in ihre Hand auf und zählt erneut), „eins, zwei, drei, vier" (Ein Stein fällt ihr aus der Hand).
I schiebt ihr die Schachtel hin, in der die Steine waren.
R. schüttelt den Kopf, nimmt den nächsten Stein, der fällt ihr wieder aus der Hand: „sieben, acht, neun, zehn" (Sie zählt langsam und nimmt zu jedem Zahlwort, das sie nennt genau einen Stein. Die Steine in der Hand werden nun in die Schachtel geleert.). „Elf, zwölf, dreizehn, vierzehn, achtzehn,..." (Sie sieht auf, überlegt eine Weile.), „siebzig, siebenundzwanzig" (Die volle Hand wird erneut geleert.), „achtundzwanzig, sechsundzwanzig, siebzig, vierzig, achtz-" (Der Stein fällt ihr aus der Hand, sie nimmt ihn erneut auf.), „achtzig, dreißig!" (Sie blickt die Interviewerin überzeugt an, wie um zu signalisieren, dass ihre Antwort ‚dreißig' ist.).

Furi:
F. beginnt zu zählen, er deutet bei jedem Zahlwort auf einen anderen Stein, verändert deren Lage jedoch nicht.
F: „Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn, elf, zwölf, drei-zehn" (Er deutet bei beiden Silben des Wortes ‚drei-zehn' auf je einen Stein). „vierzehn, fünfzehn, sechzehn, siebzehn" (Er deutet im selben Rhythmus weiter auf Steine, nennt jedoch keine Zahlwörter mehr. Dabei deutet er auch auf Steine, die er bereits gezählt hat. Irgendwann blickt er erwartungsvoll auf.).
I: „Ok, wie viele sind's?"
F: „Dreiundsechzig."

Um das resultative Zählen zu schulen, eignen sich klassische Würfelspiele, wie z.B. ‚Mensch ärgere dich nicht' oder ‚Fang den Hut'. Dabei wird die Eins-zu-Eins-Zuordnung regelrecht ‚trainiert', weil man den Spielstein mit jedem Zahlwort ein Feld weiter zieht. Auch einige Spiele aus Programmen zur mathematischen Frühförderung bieten sich an, wie z.B. ‚Edelsteine sammeln' (Dolenc, u.a. 2005) oder ‚Räuber und Goldschatz' (Wittmann, Müller 2009). Darüber hinaus können auch Schätzaufgaben einen Anreiz für das Zählen bieten, z.B. wie viele Murmeln sind im Glas? Dabei geht es nicht um das exakte Vorhersagen des Ergebnisses. Ziel ist es, begründet zu schätzen, indem das potenzielle Ergebnis aufgrund verschiedener Überlegungen eingegrenzt wird. Um zu überprüfen, wer mit seiner Schätzung dem wahren Ergebnis am nächsten kommt, bietet sich das Zählen an. Dadurch ergibt sich ein herausfordernder Zählanlass bei größeren Mengen.

3.3 Blick für Strukturen

Neben den im Vorschulalter erhobenen Zählfertigkeiten (vorwärts, rückwärts, weiterzählen) und der Fähigkeit, resultativ zu zählen, hat sich auch der Blick für Strukturen als ein wichtiger Teil des für spätere Rechenleistungen prädiktiven Zahlenvorwissens herauskristallisiert (Dornheim 2008). Mithilfe eines guten Blicks für Strukturen kann es beispielsweise bereits Kindern im vorschulischen Bereich gelingen, Anzahlen in Würfelbildanordnungen simultan zu erfassen. Bei der Arbeit mit Arbeitsmitteln wie z.B. dem Zwanzigerfeld oder dem Rechenrahmen in Jahrgangsstufe 1 ist ein Blick für Strukturen zwingend notwendig, um sie ‚nicht-zählend' verwenden zu können. Arbeitsmittel erfüllen dann ihren Zweck, wenn es in der Arbeit mit diesen gelingt, mentale Vorstellungsbilder aufzubauen, mit denen dann in der Vorstellung operiert werden kann (vgl. Krauthausen, Scherer 2007, S. 246). Werden die Strukturen der Arbeitsmittel erkannt (beispielsweise am Zwanzigerfeld: ‚Das sind 9. Das sehe ich gleich, weil das ist eins weniger als zehn.'), ist eine mentale Operation auf der Grundlage der in diesem Arbeitsmittel präsentierten Struktur möglich, wenn nicht, gelingt dies nur sehr eingeschränkt. Gerade bei größeren Zahlen bleibt dann oft nur das Zählen. Die Problematik des verfestigten zählenden Rechnens ist mittlerweile bekannt und bereits viel diskutiert (vgl. dazu auch Wartha, Schulz 2011).
Würfelbilder gehören zu den ersten strukturierten Mengendarstellungen, die Kinder im Spiel bewusst wahrnehmen lernen. Die Anzahl der Würfelpunkte kann gezählt werden, unter Umständen gelingt es aber auch, das Würfelbild gleich auf einen Blick zu erkennen (Simultan- bzw. Quasi-Simultanerfassung, wenn die Strukturen genutzt werden). Auch die zehn Finger stellen durch die Untergliederung in fünf Finger an jeder Hand eine strukturierte Menge dar, die Kinder schon früh mit Anzahlen in Verbindung bringen (‚Zeig doch mal, wie alt du bist.'). Um die Struktur nutzen zu können (z.B. beim Rückschluss vom bekannten Würfelbild der Fünf auf das der Vier: ‚Das ist eine Vier, da fehlt der Punkt in der Mitte.'), ist eine bewusste Reflexion notwendig, eine „Aufmerksamkeitsfokussierung, die die Perspektive des Schülers auf die ... relevanten arithmetischen Aspekte lenkt, also insbesondere auf die in der Handlung sich ergebenden numerischen Veränderungen und deren Beziehungen untereinander" (Lorenz 1998, S. 184).
Bei der Beobachtung der Kinder lassen sich infolgedessen drei Qualitäten im Umgang mit strukturierten Mengen unterscheiden. So gibt es Kinder, die Strukturen erkennen, andere, die Strukturen auch erklären können (‚Das sind sechs, weil da sind die Punkte so ordentlich in zwei Reihen.') und Kinder, die Strukturen bereits für weitere Erkenntnisse nutzen (‚Das sind fünf, weil hier ist die vier und wenn in der Mitte noch einer dazukommt, sind es fünf').
Vor Schuleintritt muss man damit rechnen, dass es Kinder gibt, die z.B. die Würfelbilder von eins bis sechs noch nicht auf einen Blick erkennen, andere gehen bereits flexibel mit den Strukturen um, können unstrukturierte Mengen z.B. blitzschnell in Gedanken umstrukturieren und so auch bei unstrukturierten Mengen schnell erkennen, wie viele Elemente abgebildet sind. Sie nutzen die Strukturen zur Anzahlbestimmung oder auch für erste Rechenoperationen.

Reflexion und Schulung der eigenen Wahrnehmung:
Welche qualitativen Unterschiede entdecken Sie in den beiden Erklärungen?
Welche Schlussfolgerungen ziehen Sie für den Unterricht?
Auf dem Tisch liegen ein Kärtchen mit einem Würfelbild der sechs und ein Kärtchen mit sechs Kreisen, die nicht strukturiert angeordnet sind. Die Kinder werden gefragt: „Bei welcher Karte konntest du denn schneller erkennen, wie viele Punkte da drauf sind? Bei der oder bei der?“ (Es wird auf jede Karte gedeutet.)

Sabina:
S: „Bei der!“ (Sie zeigt auf das Würfelbild.)
I: „Kannst du es mir erklären, warum du das bei der Karte schneller erkennen konntest?“ (I deutet auf strukturierte Mengendarstellung.)
S: „Weil, auf der Seite sind drei,“ (fährt eine Dreierreihe ab) „und auf der Seite sind drei“ (Sie fährt die zweite Dreierreihe entlang.) „und auf der“ (zeigt auf unstrukturierte Karte) „sind die alle durcheinander. Und hier hab ich's auch gleichzeitig erkannt, weil da müsste der Strich durch gehen“ (Sie teilt die unstrukturierte Menge mit einem fiktiven Strich in zwei Dreiermengen.), „weil hier sind dann drei“ (zeigt unter die imaginäre Linie) „und da sind dann drei. Also sind dann hier“ (sie deutet auf alle unstrukturiert dargebotenen Punkte) „auch sechs.“

Hakan:
H: „Bei der!“ (Er zeigt auf das Würfelbild.)
I: „Kannst du es mir erklären, warum du das bei der Karte schneller erkennen konntest?“ (I deutet auf strukturierte Mengendarstellung.)
H: „Wo ich noch vier Jahre alt war, da hab ich das immer erkennt, weil wenn ... ein, .. ääh ... ah, wir ein Mensch ärgere dich nicht haben und wenn sechs kommt, dürfen wir nach sechs noch einmal würfeln. Weil des ... unser Würfel-Sechs ist auch so diese Sechs. Deswegen!“

Der Blick für Strukturen kann durch zahlreiche Spiele mit Mengenkärtchen gefestigt werden, beispielsweise durch ‚Zahlen stechen‘, ‚Blitzlesen‘, ‚Halli Galli‘ oder Memory jeweils mit verschiedenen strukturierten, aber auch unstrukturierten Kärtchen (z.B. in Dolenc, u.a. 2005; in Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung 2008). Als Strukturen bieten sich zunächst die Würfel- und die Fingerbilder an, da diese aus dem ersten Erfahrungsbereich der Kinder kommen, weiterführend kann auf strukturierte Materialien aus dem Anfangsunterricht zurückgegriffen werden. In der Arbeit mit Strukturen ist es wichtig, dass diese und auch die Vorteile von Strukturen beim Erkennen der Anzahlen immer wieder thematisiert und verbalisiert werden (‚Wie hast du das denn so schnell erkannt?‘). Nur so wird das Bewusstsein dafür auch geweckt (vgl. dazu auch Schipper 2003; Scherer, Moser Opitz 2010), und die Strukturen können auf dieser Grundlage für weitere Anforderungen genutzt werden.

4 Ausblick

Im Sinne einer für die Kinder gewinnbringenden inhaltlichen Ausgestaltung des Mathematiklernens und der bestmöglichen Förderung im Übergang von der Kindertagesstätte zur Grundschule erscheint es unumgänglich, sich mit der Entwicklung mathematischer Kompetenzen und mit geeigneten Anregungssituationen auseinanderzusetzen. Dies ist in der Regel Erziehenden und Lehrkräften gleichermaßen bewusst und auch ein Bedürfnis. Erfahrungsgemäß kann die gemeinsame Arbeit an fachlichen und entwicklungspsychologischen Fragestellungen ein regelrechter Motor für die Kooperation von Erziehenden und Lehrkräften sein (vgl. Gasteiger 2009). Die Kooperation gewinnt dann über das persönliche Kennenlernen und Überlegungen zur pädagogisch sinnvollen Gestaltung des Übergangs von der Kindertagesstätte zur Schule einen inhaltlichen Schwerpunkt hinzu. Im Bewusstsein, gemeinsam daran zu arbeiten, die Entwicklungschancen der Kinder zu verbessern, ist eine natürliche Motivation zur Weiterbildung bei beiden Berufsgruppen gegeben, die auch im Rahmen der SINUS-Arbeit gut genutzt werden kann.

Literaturverzeichnis

Clements, Douglas H. (2004). Geometric and spatial thinking in early childhood education. In: Clements, D.H.; Samara, J. (Eds.). Engaging Young Children in Mathematics. Standards for Early Childhood Mathematics Education. S. 267-297. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Devlin, Keith (2005). Der Mathe-Instinkt. Warum Sie ein Genie sind und Ihr Hund und Ihre Katze auch. Stuttgart. Klett-Cotta.

Dornheim, Dorothea (2008). Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten. Berlin. Logos.

Friedrich, Gerhard; de Galgóczy, Viola (2004). Komm mit ins Zahlenland. Eine spielerische Entdeckungsreise in die Welt der Mathematik. Freiburg im Breisgau: Christopherus im Verlag Herder.

Fuson, Karen (1988). Children's Counting and Concepts of Number. New York. Springer.

Gasteiger, Hedwig (2009). Übergänge beim Mathematiklernen gestalten: vom Kindergarten in die Primarstufe. In: Heinze, Aiso; Grüßing, Meike (Hrsg.). Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium – Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht. S. 271-280. Münster. Waxmann.

Gasteiger, Hedwig (2010). Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte. Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes. Münster. Waxmann.

Gelman, Rochel; Gallistel Randy (1986). The Child's Understanding of Number. 2. Auflage. Cambridge, Massachusetts, London. Harvard University Press.

Hasemann, Klaus (2007). Anfangsunterrricht Mathematik. Berlin, Heidelberg. Spektrum Akademischer Verlag.

Jugendministerkonferenz (2004). Gemeinsamer Rahmen der Länder für die frühe Bildung in Kindertageseinrichtungen. Beschluss vom 13./14.05.2004. http://www.kmk.org/fileadmin/pdf/PresseUndAktuelles/2004/Gemeinsamer_Rahmen_Kindertageseinrich_BSJMK_KMK.pdf (aufgerufen 21.05.2011).

Krauthausen, Günther; Scherer, Petra (2007). Einführung in die Mathematikdidaktik. München. Spektrum Akademischer Verlag.

Lorenz, Jens Holger (1998). Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung. Göttingen. Hogrefe.

Preiß, Gerhard (2006). Guten Morgen, liebe Zahlen. Eine Einführung in die „Entdeckungen im Zahlenland". Kirchzarten: Klein Druck .

Prenzel, Manfred; Heidemeier, Heike; Ramm, Gesa; Hohensee, Fanny; Ehmke, Timo (2004). Soziale Herkunft und mathematische Kompetenz. In: PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.). PISA 2003. Der Bildungstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs. S. 273-282. Münster. Waxmann.

Scherer, Petra; Moser Opitz, Elisabeth (2010). Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe. Heidelberg. Spektrum Akademischer Verlag.

Schipper, Wilhelm (2003). Lernen mit Material im arithmetischen Anfangsunterricht. In: Baum, Monika; Wielpütz, Hans (Hrsg.). Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch. S. 221-237. Seelze. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Schmidt, Siegbert; Weiser, Werner (1986). Zum Maßzahlverständnis von Schulanfängern. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 7/2-3, S. 121-154.

Schmidt, Roland (1982). Die Zählfähigkeit der Schulanfänger – Ergebnisse einer Untersuchung. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 12/10, 371-376.

Spiegel, Hartmut; Selter, Christoph (2003). Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten. Seelze-Velber. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Wartha, Sebastian; Schulz, Axel (2011). Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen. IPN.

Eine Auswahl an Materialien und Bücher zur elementaren, mathematischen Förderung, die als weitere Anregung dienen können:

Bares, Hannelore; Wunderlich, Gabriele (2002). Zeit erfahren, strukturieren und messen. Embsen-Oerzen. Der Kleine Verlag

Benz, Christiane (2010). Minis entdecken Mathematik. Braunschweig. Westermann.

Dolenc, Ruth; Gasteiger, Hedwig; Kraft, Gerti; Loibl, Gabriele (2005). ZahlenZauberei. Mathematik für Kindergarten und Grundschule. München, Düsseldorf, Stuttgart. Oldenbourg.

Hoenisch, Nancy; Niggemeyer, Elisabeth (2004). Mathe-Kings. Junge Kinder fassen Mathematik an. Weimar, Berlin. verlag das netz

Keller, Bernhard; Noelle Müller, Beatrice (2007). Kinder begegnen Mathematik. Erfahrungen sammeln. Zürich. Lehrmittelverlag des Kantons Zürich.

Metcalf, Robert; Röckener, Andreas (2005). Zahlen, bitte! Eine musikalische Reise in die Welt der Zahlen. München. Terzio.

Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung (Hrsg.) (2008). Lerndokumentation Mathematik, Anregungsmaterialien. Berlin. http://www.transkigs.de/fileadmin/user/redakteur/Berlin/Lerndokumentation_Mathematik_Anregungsmaterialien_gesamt_7.10.08.pdf (aufgerufen 21.05.2011).

Steinweg, Anna Susanne. (2006). Lerndokumentation Mathematik. Berlin. http://www.transkigs.de/fileadmin/user/redakteur/Berlin/Lerndoku_Mathe_druckreif_12.06.pdf (aufgerufen 21.05.2011)

Wittmann, Erich; Müller, Gerhard. (2009). Das Zahlenbuch. Handbuch zum Frühförderprogramm. Stuttgart. Klett.

Wunderlich, Gabriele; Bares, Hannelore (2003). Wo Kinder rechnen lernen. Band 1: Zu Hause. Embsen-Oerzen. Der Kleine Verlag.

Partner des Programms *SINUS an Grundschulen*

Programmträger: IPN, Kiel
Projektleitung: Prof. Dr. Olaf Köller
www.ipn.uni-kiel.de

SINUS an Grundschulen
Projektkoordination am IPN: Dr. Claudia Fischer
Tel. +49(0)431/880-3136
cfischer@ipn.uni-kiel.de
www.sinus-an-grundschulen.de

Programmkoordination für die Länder durch das
Ministerium für Bildung und Kultur
des Landes Schleswig-Holstein (MBK)
Dr. Kai Niemann
www.schleswig-holstein.de/MBK/DE/MBK_node.html

Serverbetreuung: Deutsches Institut für Internationale
Pädagogische Forschung (DIPF)
www.dipf.de

ISBN für diese Handreichung
ISBN: 978-3-89088-218-5