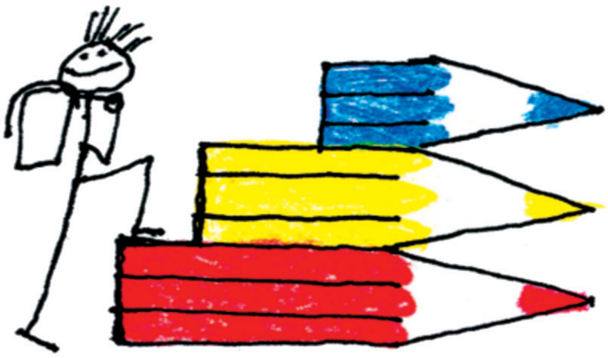
Handreichungen des Programms SINUS an Grundschulen

Mathematische Kompetenzen erheben, fördern und herausfordern

Klaus-Ulrich Guder

SINUS



an Grundschulen

Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

Mathe

Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Impressum

Klaus-Ulrich Guder
Mathematische Kompetenzen erheben, fördern und herausfordern

Publikation des Programms *SINUS an Grundschulen*
Programmträger: Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) an der Universität Kiel
Olshausenstraße 62
24118 Kiel
www.sinus-an-grundschulen.de

Projektleitung: Prof. Dr. Olaf Köller
Projektkoordination: Dr. Claudia Fischer
Redaktion u. Realisation dieser Publikation: Brigitte Dedekind, Verena Hane
Kontaktadresse: info@sinus-grundschule.de

ISBN: 978-3-89088-216-1

Nutzungsbedingungen

Klaus-Ulrich Guder

Mathematische Kompetenzen erheben, fördern und herausfordern

1 Einführung

„Ich habe gar keine Kinder, es geht viel mehr um meinen Neffen. Er will ständig rechnen, ohne Taschenrechner. Er ist 5 1/2 Jahre alt. Er zählt im Zahlenraum von 0-10000 (er zählt seit er 1 1/2 ist), und ich muss ih[m] ständig [A]ufgaben aufschreiben, und er rechnet diese schriftlich. Findet ihr[,] das[s] das normal ist?"

Diese Frage einer besorgten Tante in einem Forum zu Mathematischer Begabung (*http://www.mysnip.de/forum-archiv/thema/3336/143108/Mathematische+Begabung.html*) macht deutlich, dass es bereits vor der Einschulung große Kompetenz- und Entwicklungsunterschiede von Kindern gibt. Wie Lorenz (2000, S. 22) feststellt, liegt die Entwicklungsvarianz bei Kindern im Grundschulalter bei bis zu fünf Jahren. Diese großen Differenzen stellen immense Herausforderungen an die Lehrkräfte und erfordern einen Unterricht, der die differenzierten Erkenntnisse über die Kompetenzen der Kinder berücksichtigt. Aufgabenstellungen und Arbeitsaufträge müssen passend sein: Die Anforderungen an die Kinder dürfen einerseits keine Überforderungen darstellen, andererseits sollten sie über den gegenwärtigen Kompetenzstand hinaus angemessene Herausforderungen bieten. Diese Anpassung an die individuellen Kompetenzen muss für alle Kinder geleistet werden.

Wie im Folgenden noch detailliert ausgeführt wird, sind Förderung und Herausforderungen zwei Seiten einer Medaille, da angepasste Förderung immer eine Herausforderung an die bestehenden Kompetenzen darstellt. Sowohl bei den Leistungsstarken als auch bei den Kindern mit geringen Leistungen muss Förderung eine Weiterentwicklung ermöglichen und sie in die individuelle Zone der nächsten Entwicklung bringen. Was eine passende Herausforderung ist, hängt also vom Individuum ab. Eine Möglichkeit, entsprechende Anforderungen zu stellen, besteht in der natürlichen Differenzierung und den eng damit verbundenen Substanziellen Lernumgebungen, die durch ihre Komplexität Bearbeitungen auf verschiedenen Niveaus ermöglichen. Kinder benötigen Rückmeldungen über ihre Lernerfolge, damit sie tatsächlich die für sie passenden und sie weiter bringenden Probleme bearbeiten. Auch dazu ist, wie an späterer Stelle erörtert wird, eine Kompetenzdiagnostik mit geeigneten Instrumenten zur Erfassung vom Kenntnisstand des Kindes notwendig. Um der Gefahr der Selbstüber- oder -unterschätzung der Kinder bei der Entscheidung für ein Niveau vorzubeugen, muss die Lehrkraft über die Kompetenzen der Kinder informiert sein und gegebenenfalls steuernd eingreifen. So wird die realistische Selbsteinschätzung der Kinder unterstützt und sicher gestellt, dass tatsächlich kognitive Weiterentwicklung initiiert wird.

Sowohl für die Bestimmung als auch für die Herausforderung von Kompetenzen sind geeignete Anforderungen und Aufgaben für die Kinder notwendig. Dabei sind zunächst zwei Typen von Aufgaben zum Leisten und zum Lernen zu unterscheiden. Die Aufgaben zum Leisten dienen dazu, die Kompetenzen der Kinder für sie selbst und für andere, speziell für die Lehrkraft, erfahrbar zu machen. Sie bieten dadurch dem Kind die Chance, seine eigenen Kompetenzen angemessen einzuschätzen und der Lehrkraft Möglichkeiten, angemessene Leistungsurteile abzugeben und rückzumelden. Aufgaben zum Lernen dienen dazu, den Kompetenzstand zu erweitern und zu sichern. Für die Lehrkraft können sie auch als Hilfsmittel zur Beobachtung von Lernprozessen dienen. Beide Aufgabentypen liefern daher Möglichkeiten zur Kompetenzfeststellung. (vgl. Büchter/Leuders 2005, S. 12)

Neben diesem auf das Individuum ausgerichteten Blick kann und soll eine Kompetenzdiagnostik auch Rückschlüsse über den Unterricht zulassen, die der Reflexion des eigenen unterrichtlichen Handelns dienen und zur Verbesserung und Weiterentwicklung der Unterrichtsqualität genutzt werden können.

Im Folgenden sollen verschiedene Möglichkeiten zur Diagnostik genauer beleuchtet und in ihrer Funktion eingeordnet werden. Anschließend wird ein Konzept zur individuellen Förderung vorgestellt, und es werden Möglichkeiten zur Herausforderung aller Kinder im alltäglichen Unterricht behandelt.

2 Möglichkeiten der Diagnostik

2.1 Produkte und Prozesse

Welche Kompetenzen sollen bei Schülerinnen und Schülern durch Diagnostik überhaupt erfasst werden? Eine Antwort darauf geben die Bildungsstandards (KMK 2005, S. 6-7), die die Unterscheidung zwischen „Allgemeinen mathematische Kompetenzen“ und „Inhaltsbezogenen mathematische Kompetenzen“ vornehmen. Hierbei lassen sich zu den inhaltsbezogenen Leitideen (Zahlen und Operationen, Raum und Form, Muster und Strukturen, Größen und Messen und Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit) in der Regel deutlich leichter Kriterien formulieren, die zeigen, ob diese Kompetenzen erreicht sind, und sie lassen sich in der Regel ökonomischer schriftlich erheben.

Die allgemeinen Kompetenzen (Problemlösen, Argumentieren, Modellieren, Kommunizieren und Darstellen) lassen sich dagegen weniger gut erfassen; eine Kompetenzdiagnostik bleibt hier schwieriger. Schriftliche Darstellungen gerade von Grundschulkindern sind oft schwer verständlich und bedürfen einer aufwändigen Deutung. Die Einordnungen mündlicher Äußerungen im Unterrichtsgespräch in Echtzeit ist anspruchsvoll und führt sehr leicht zu Fehleinschätzungen. Erschwerend ist, dass der kumulative Aufbau dieser Kompetenzen in einem längerfristigen Prozess geschieht. Die Erfassung kann daher nicht nur punktuell, sondern muss zu mehreren Zeitpunkten erfolgen.

Neben der Unterscheidung in allgemeine, prozessbezogene und inhaltsbezogene Kompetenzen muss geklärt werden, welches Ziel mit der angestrebten Diagnostik verfolgt werden soll. Soll die sichere Kenntnis und Beherrschung von Standardverfahren untersucht werden, oder soll festgestellt werden, wie Kinder denken und argumentieren und ob sie ein Verfahren beherrschen, oder eben auch, warum sie es noch nicht beherrschen. Benötigt werden also Verfahren, die sowohl allgemeine Kompetenzen und inhaltsgebundene Kompetenzen als auch Leistungen und Denkprozesse erfassen können.

Neben diesen Abgrenzungen bezüglich der betrachteten Kompetenzen müssen verschiedene diagnostische Grundpositionen unterschieden werden. Jordan und vom Hofe (2008, S. 4-5) unterscheiden zwei diagnostische Perspektiven: „Produktorientierte Diagnostik" und „Prozessorientierte Diagnostik". Sie charakterisieren sie in folgender Form:

„Produktorientierte Diagnostik

Methoden, die auf die Erfassung individueller Lernergebnisse (also auf die Produkte) ausgerichtet sind, gehören zur sogenannten produktorientierten Diagnostik. Der Lehrer wertet die Ergebnisse aus (meist gemäß der Pole ,,korrekt" oder ,,nicht korrekt") und kommt zu einer Einordnung der erbrachten Leistung (,,kann" oder ,,kann nicht")." (Jordan/v. Hofe 2008, S. 4)

„Prozessorientierte Diagnostik

Zu einer prozessorientierten Diagnostik gehören vor allem Methoden, die auf die Erfassung individueller Lernprozesse ausgerichtet sind. Ziel ist es, die einem Ergebnis zugrunde liegenden Gedanken eines Schülers, einer Schülerin besser zu verstehen (,,Warum wird etwas gekonnt oder nicht gekonnt?"), um möglichst angemessen auf eine Lösung oder Schülerantwort reagieren zu können." (Jordan/v. Hofe 2008, S. 5)

Diese beiden Perspektiven müssen unabhängig von den Kompetenzbereichen gesehen werden, da sowohl prozessbezogene Kompetenzen als auch inhaltliche Kompetenzen an einem Produkt beurteilt werden können. So lassen sich beispielsweise geeignete Kriterien formulieren, wann eine Argumentation als schlüssig und überzeugend gewertet wird. Genauso können beide Kompetenzbereiche aus prozessorientierter Perspektive betrachtet werden und beispielsweise Denkvorgänge bei der Bearbeitung von Standardaufgaben rekonstruiert und in ihrem sachlogischen Aufbau oder ihrer kognitiven Struktur beschrieben werden.

In diesen beiden Prinzipien spiegeln sich auch die Funktionen, in denen sich Schule und Lehrkraft bei der Diagnostik befinden, wieder. Sie dient zum einen als Steuerungsinstrument, das Entscheidungen über Schullaufbahnen von Kindern rechtfertigt, und zum anderen als Entwicklungsinstrument, das die Kompetenzen des einzelnen Kindes als Ausgangspunkt für eine passende Unterstützung erfasst, um sie weiter zu entwickeln (vgl. Grundschulverband 2003, S. 2). Diagnostik dient also dazu, Informationen zum Lernverhalten des Kindes zu sammeln und aufzubereiten mit dem Ziel, sie für seinen weiteren Lernprozess zu nutzen.

Im Folgenden werden verschiedene Verfahren zur Kompetenzbestimmung genauer dargestellt.

2.2 Standardisierte Tests

Bei standardisierten Tests handelt es sich um Verfahren, die durch ihre Konstruktion objektiv, reliabel und valide sind, das heißt, dass ihre Ergebnisse möglichst unabhängig von den Durchführenden und den Auswertenden sind, dass sie die zu überprüfende Kompetenz möglichst genau und ohne große Streuung nachweisen und dass sie tatsächlich die Kompetenzen überprüfen, die sie überprüfen sollen. Um diese Qualitätsmerkmale zu erfüllen, werden die entworfenen Testaufgaben psychometrisch überprüft. Außerdem wird die Durchführung eindeutig geregelt, und die Auswertung erfolgt anhand präzise vorgeschriebener, genau formulierter Kriterien. Die Testaufgaben sind in der Regel so konstruiert, dass ihre erfolgreiche Bearbeitung von genau einer Kompetenz oder Fähigkeit abhängt. Aus ökonomischen Gründen sind diese Tests meist schriftlich zu bearbeiten. Die Einschätzung der Leistungen in diesen Tests erfolgt anhand einer Normstichprobe, deren Bearbeitungserfolge als Maßstab eingesetzt werden. Sie sind zu den produktorientierten Verfahren zu zählen.

Beispiele für standardisierte Tests zur mathematischen Kompetenzbestimmung, die Lehrkräften zur Verfügung stehen, sind der curriculumsvalide Deutsche Mathematiktest (DeMaT) (Krajewski et. al. 2002, 2004), (Roick 2004), (Gölitz et. al. 2006) oder der Hamburger Rechentest (HaReT) (Lorenz 2006). Auch die Vergleichsarbeiten VERA 3 (ZEPF 2011) gehören zu den standardisierten Tests, die zur Unterrichtsentwicklung genutzt werden. IGLU- (Bos et. al. 2003) und TIMSS -Tests (Bos et. al. 2008) können nicht genutzt werden, da sie der Öffentlichkeit nicht zur Verfügung stehen.

Ein wesentlicher Vorteil standardisierter Tests ist die Vergleichbarkeit der Ergebnisse. Dadurch wird verhindert, dass eine Lehrkraft sich nur am Klassendurchschnitt oder an subjektiven Maßstäben orientiert. Vermieden werden dadurch Effekte bei der Beurteilung, die sich durch die Zusammensetzung der eigenen Klasse oder des Einzugsgebiets der Schule ergeben könnten. Außerdem liefern sie, falls die Leistungen einzelner Kinder deutlich von den Erwartungen abweichen, Anhaltspunkte für dringenden Förderbedarf oder auch für den Bedarf besonderer Forderung. Zum Teil besteht jedoch die Gefahr von sogenannten Deckeneffekten, wie beispielsweise beim HaReT (Lorenz 2006, S. 5), dessen Tests bewusst *„so konstruiert [sind], dass sie möglichst im unteren Leistungsbereich differenzieren"* und *„ein Deckeneffekt für die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler … bewusst in Kauf genommen"* wird. Diese Deckeneffekte bedeuten, dass die Testitems so entworfen sind, dass die leistungsstarken Kinder fast alle Items ohne Schwierigkeiten oder Fehler bewältigen und somit ihre Leistungsfähigkeit nicht mehr unterschieden werden kann. Ausgehend von den Ergebnissen sollte sich bei nach unten abweichenden Leistungen möglichst noch eine differenziertere individuelle Förderdiagnostik anschließen, um die Ergebnisse weiter abzusichern und individuelle Fördermöglichkeiten aufzuzeigen. Ein weiterer Vorteil eines standardisierten Testverfahrens kann sein, dass Klasseneffekte sichtbar werden, die einen Einstieg in eine Veränderung des Unterrichtsstils auslösen könnten.

Neben der reinen Beschreibung „kann" oder „kann nicht" erlauben derartige Testverfahren gegebenenfalls auch Beschreibungen von Schwierigkeiten auf curricularer Ebene. So lassen sich beispielsweise Feststellungen wie „Sabine kann Überträge bei der schriftlichen Addition sachgerecht verarbeiten, Überträge bei der schriftlichen Subtraktion mit Zwischennullen beherrscht sie noch nicht." treffen. Aussagen über mentale Vorgänge und mögliche kognitive Schwierigkeiten sowie die Einleitung geeigneter Fördermaßnahmen sind jedoch kaum möglich. Um darüber Informationen zu erhalten, werden Verfahren zur prozessorientierten Diagnostik eingesetzt, die meist nicht standardisiert sind. Beispiele dafür finden sich weiter unten. Weitere Nachteile für die Verwendung von standardisierten Tests im Alltag können die Kosten zur Anschaffung der Tests sowie der zeitliche Aufwand zur Durchführung gemäß der Vorgaben sein.

2.3 Informelle schriftliche Testverfahren

In den Durchführungsbedingungen weniger rigide als die standardisierten Verfahren sind informelle schriftliche Testverfahren, die jedoch meist auch produktorientiert sind. Hier können professionell entworfene, jedoch nicht standardisierte Testverfahren eingesetzt werden, die zwar Auskunft über die vorhandenen Kompetenzen geben, aber keinen Anspruch erheben, eine quantifizierte Einordnung der Kompetenzen im Vergleich mit einem Normschüler vorzunehmen. Dabei gibt es Testverfahren, die sich an einzelnen Lehrbüchern oder Lehrgängen orientieren und meist Begleitmaterial zum jeweiligen Lehrgang sind oder lehrwerksunabhängige Testverfahren (z.B. Diagnosebegleiter Guder et. al. 2007a, 2007b, 2008b). Außerdem erheben diese informellen Tests in der Regel nicht den Anspruch, mithilfe der Lösung einer Testaufgabe jeweils genau eine Fähigkeit zu testen. Zur erfolgreichen Bearbeitung der Aufgaben sind häufig mehrere Fähigkeiten notwendig, so dass aus der falschen Lösung nicht auf eine einzelne mangelhaft ausgebildete Fähigkeit zurückgeschlossen werden kann. Derartige informelle Tests gibt es mittlerweile von diversen Verlagen auch internetgestützt. Damit ist eine Bearbeitung am Rechner möglich. Meist sind diese Tests produktorientiert und können, da die Auswertung regelbasiert per Computer erfolgt, kaum Aufschluss über konkrete Lernprozesse geben. Regeln zur Beurteilung von prozessorientierten Kompetenzen sind nur unter großem Aufwand zu erreichen, da alle frei geäußerten richtigen Antworten erfasst werden müssten.

Neben diesen kommerziellen Verfahren bieten sich natürlich auch selbst entworfene Tests (z. B. Klassenarbeiten) an, die spezifisch auf die vermittelten Inhalte abgestimmt sind. Gefahren dieser Testverfahren bestehen in einer Orientierung an einer Sozialnorm innerhalb der Klasse, die zu Fehleinschätzungen der Kompetenzen führen kann. Speziell der Einsatz von Klassenarbeiten, die auch zur Notenfindung genutzt werden, birgt außerdem die Gefahr, dass hier nur kurzfristiges Lernen forciert wird und entsprechend kurzlebige Lernerfolge festgestellt werden.

Vorteile dieses informellen Vorgehens mit selbst erstellten Aufgabenstellungen sind die größere Passung zum vorhergehenden und anschließenden Unterricht und die Möglichkeit, gezielt spezifische diagnostische Fragen zu untersuchen. Die eingesetzten Aufgabenstellungen unterscheiden sich in der Intention, mit der sie gestellt werden. Soll der Test differenzierte Auskünfte über das Beherrschen von Rechenfertigkeiten geben, so müssen die Aufgaben so gestellt werden, dass bekannte curriculare Hürden identifizierbar sind. Mehrere Aufgaben zu einem Inhalt sollten daher unterschiedliche Schwierigkeitsstufungen gemäß der drei in den Bildungsstandards formulierten Anforderungsbereiche Reproduzieren, Zusammenhänge herstellen sowie Verallgemeinern und Reflektieren (vgl. KMK 2005, S. 13) enthalten. Bereits in den 1980er Jahren schlugen Radatz (1980) und Gerster (1982) geeignete Aufgaben vor, die Fehlvorstellungen identifizieren können. Dieses Vorgehen lässt daher trotz einer produktorientierten Diagnostik Rückschlüsse auf Ursachen für Fehler zu.

Soll ein informeller schriftlicher Test gezielt nicht nur über inhaltsgebundene Kompetenzen Auskunft geben, so müssen Aufgabenformate gewählt werden, die die prozessbezogenen Kompetenzen überprüfen. Die Aufgabenformate müssen daher offen gestaltet sein, damit Kinder die Möglichkeit haben, sich frei zu den Anforderungen zu äußern. Anhand der von den Kindern gewählten Lösungswege und ihren Darstellungen lassen sich dann Rückschlüsse auf individuelle Denkweisen ziehen.

2.4 Interviews und diagnostische Gespräche

Hierbei bearbeitet ein Kind im Gespräch mit der diagnostizierenden Person Problemstellungen. Das Kind wird ermuntert, seine Gedankengänge bei der Lösung zu verbalisieren oder handelnd zu demonstrieren, ohne dass die interviewende Person inhaltlich hilft oder unterstützt (zur Methode vgl. Selter/Spiegel 1997, S. 100-112). Gerade hierbei lassen sich die allgemeinen, prozessbezogenen Kompetenzen deutlich besser feststellen als es in schriftlichen Testverfahren möglich ist. Die herausfordernden Aufgaben an das Kind müssen so ausgewählt werden, dass sie unterschiedlich bearbeitet werden können, damit mithilfe der Versprachlichung die Denkprozesse und Vorstellungen des Kindes rekonstruiert werden und Rückschlüsse auf die Kompetenzen erfolgen können. Durch geeignete Anschlussfragen sollten Hypothesen über Ursachen des Fehlverständnisses weiter untersucht werden, um gegebenenfalls geeignete Fördermaßnahmen einzuleiten.

Zu nennen ist hier beispielsweise das ElementarMathematische BasisInterview (EMBI), das eine Anleitung zur individuellen Diagnose von mathematischen Kompetenzen in den ersten Schuljahren bietet und dabei nicht nur bereits vorhandene schulische Fähigkeiten und Fertigkeiten, sondern auch basale Lernvoraussetzungen mit untersucht. Es bietet dem Kind *„individuelle Herausforderungen und die Gelegenheit zu zeigen, was es alles schon kann und weiß. So werden sowohl besondere Stärken als auch besonderer Unterstützungsbedarf in einer Form offengelegt, die direkte Anknüpfungspunkte für Unterricht und Einzelförderung bietet."* (Peter-Koop et. al. 2007, S. 4) Hierbei wird es den Kindern ermöglicht, durch Handlungen mit Material auch Ideen zu zeigen, die sie noch nicht verbalisieren oder gar verschriftlichen können.

Ein weiteres Instrument, das geeignetes Material zur Interviewführung bereitstellt, sind die Einzeltestkarteien des Diagnosebegleiters (Guder et. al. 2007c und 2008d). Dieses Material stellt geeignete Aufgabenstellungen bereit, anhand derer die Kinder ihre Kompetenzen zeigen können. Je nach dem Antwortverhalten des Kindes folgen verschiedene weitergehende Fragen und Aufgabenstellungen. Außerdem gibt es dazu Hinweise auf Förderaufgaben, die auf mögliche Schwierigkeiten eingehen und die grundlegenden Kompetenzen fördern.

Bei diesem Verfahren ist ein hoher zeitlicher Aufwand für die Durchführung der Einzelgespräche erforderlich. Nutzbar für kürzere diagnostische Gespräche sind Einzel- oder Freiarbeitsphasen im Unterricht, in denen sich die Lehrperson einem einzelnen Kind widmen kann. Die Durchführung von Interviews erfordert in jedem Fall eine hohe diagnostische Kompetenz.

2.5 Beobachtungen

Neben gezielt initiierten Testsituationen oder Interviews bieten sich Beobachtungen der Kinder im Unterricht an. Entscheidend für das Gelingen ist, dass vorher festgelegt wird, worauf gezielt geachtet werden soll, welche Beobachtungsinstrumente (z.B.: Tonband, Video, Beobachtungsbogen) eingesetzt werden, über welchen Zeitraum die Beobachtung durchgeführt werden soll und wie die Ergebnisse mit angemessenem Aufwand dokumentiert werden. Hierbei können sowohl mathematische Fähigkeiten und Kompetenzen als auch allgemeinpädagogische Aspekte wie Arbeitsverhalten, Motivation, Konzentration etc. in den Fokus genommen werden. Wesentliche Aspekte für die Beobachtung finden sich in den Bildungsstandards oder den Kerncurricula der einzelnen

Bundesländer. Durch eine tabellarische Auflistung lässt sich sicherstellen, dass diese Merkmale zur Beurteilung tatsächlich herangezogen werden und die Beobachtungen über vage Eindrücke hinausgehen. Außerdem besteht dadurch die Möglichkeit, die gemachten Beobachtungen in einer Codierung (z. B. ++, + , 0, -, --) schülerspezifisch festzuhalten und so einen Überblick zu gewinnen. Hilfreich kann sein, regelmäßig für alle Schülerinnen und Schüler die entsprechende Tabelle auszufüllen und so sicherzustellen, dass alle wesentlichen Aspekte in den Blick genommen werden.

Die nachfolgende Abbildung zeigt ein Beispiel für einen Beobachtungsbogen, der die Anforderungen des niedersächsischen Kerncurriculums (NKM 2006, S. 34) umfasst.

Name des Kindes	Math. Begriffs- und Operationsverständnis	Schnelle Verfügbarkeit von Kenntnissen	Sicherheit im Ausführen von Fertigkeiten	Einbringen kreativer Ideen	Schlüssigkeit der Lösungswege und Überlegungen	Flexibilität und Problemangemessenheit	Richtigkeit von (Teil-) Ergebnissen	mündliche und schriftliche Darstellungsfähigkeit	Zielgerichtete und Ausdauer	Math Kooperationsfähigkeit	Transferfähigkeit	Lebensweltliche Anwendungsfähigkeit	konstruktiver Umgang mit Fehlern	Umgang mit didakt. Material und techn. Hilfsmitteln
Aische	+	+	0	0	+	0	+	0	0	0	0	0	-	0
Arvid	+	+	+	++	+	++	+	+	0	0	++	++	0	0
Hannah	++	++	++	0	+	0	++	+	++	++	+	+	+	0
Paul	0	0	-	0	0	-	-	0	-	-	0	-	--	0

Es gibt eine Fülle von fertigen Beobachtungsbögen, die sich jedoch deutlich in ihren Ansprüchen unterscheiden. So gibt es welche, die im Fokus mathematische Fertigkeiten haben. (vgl. GS Hude-Süd 2006, S. 3). Andere binden daneben auch prozessbezogene Kompetenzen ein (vgl. Sundermann/Selter 2006, S. 122). Zur Entwicklung solcher fachbezogenen Beobachtungsbögen fordern Sundermann und Selter, dass sie *„nicht fertig übernommen, sondern … vor dem Hintergrund der eigenen Erfahrungen kritisch diskutiert und … modifiziert werden.“* (Sundermann/Selter 2006, S. 123).

Der Umgang mit Beobachtungsbögen eröffnet die Möglichkeit, einen Überblick über die Kompetenzentwicklung des einzelnen Kindes zu erhalten und zwar außerhalb von Prüfungssituationen. Nicht leicht ist es, im Unterrichtsalltag den Überblick bei der Beobachtung zu behalten. Dabei besteht die Schwierigkeit, dass gerade stille Kinder übersehen werden. Um dieser Gefahr vorzubeugen, schlagen Sundermann und Selter alternativ den Einsatz einer Beobachtungskarte für jedes Kind vor, die neben allgemeinen Informationen über das Kind eine tabellarische Checkliste enthält, in der die individuellen Beobachtungen festgehalten werden.

2.6 Eigenproduktionen

Neben der durch eine Checkliste kontrollierten Beobachtung können von den Kindern im Unterricht angefertigte Eigenproduktionen zur Einschätzung ihrer Kompetenzen und des Bedarfs an zusätzlichen Herausforderungen herangezogen werden. Anlass zum Erstellen können beispielsweise Sachprobleme oder Aufgabenserien sein, die innermathematische Besonderheiten enthalten. Sundermann und Selter unterscheiden zwischen „Erfindungen: *Aufgaben selbst erfinden …,* Rechenwege: *Aufgaben mit ei-*

genen Vorgehensweisen bearbeiten …, Forscheraufgaben: *Auffälligkeiten beschreiben und begründen …,* Rückschau und Ausblick: *über das Lehren und Lernen schreiben"*. (Sundermann/Selter 2006, S. 125, Hervorhebungen im Original). Die Analyse dieser Eigenproduktionen liefert Aufschlüsse über das Denken der Kinder und ihre Vorstellungen. Neben prozessbezogenen Kompetenzen lassen sich anhand der durchgeführten Berechnungen auch Rechenkompetenzen erkennen.

Eine spezielle Form dieser Eigenproduktionen stellen die Lerntagebücher nach Gallin und Ruf (1998) dar, in denen Lernende ihre Gedanken beim Erschließen eines neuen Sachverhalts verschriftlichen. In diesem *„Reisetagebuch geht es nicht primär um irgendwelche Rechnungen, die möglichst richtig gelöst werden sollen, sondern darum, dass die Schülerinnen und Schüler sich in eigenen Worten zu der Arbeit am Thema äussern."* (Gallin 1999, S.5) Diese Eigenproduktionen liefern eine Fülle an Möglichkeiten, Rückschlüsse über das Denken der Kinder zu ziehen und so geeignete Herausforderungen für diese Kinder bereitzustellen.

Dieses Vorgehen basiert auf einer Würdigung der geleisteten Arbeit durch die Lehrkraft, indem sie mit dem Kind über seine gewonnenen Erkenntnisse spricht und es so weiter motiviert. Auch die nicht nur punktuelle Erhebung, sondern die Erfassung der Entwicklung von Kompetenzen zeichnet dieses Vorgehen aus. Während Kinder die Eigenproduktionen anfertigen, entstehen für die Lehrkraft Freiräume, sich mit einzelnen Kindern intensiv zu beschäftigen. Die Sichtung der Ergebnisse der Lerntagebucheintragungen erfordert Zeit und ein diagnostisches Gespür zum Erkennen der manifestierten Vorstellungen und Konzepte.

2.7 Integriertes Modell

Anhand schriftlicher Standortbestimmungen in Form von informellen Tests wird ein Überblick über den Kompetenzstand aller Kinder einer Klasse gewonnen. Der Test sollte dabei so angelegt sein, dass eine Auswertung mit geringem zeitlichen Aufwand möglich ist, er aber trotzdem Indizien dafür liefert, ob ein Kind auffällig abweichende Leistungen zeigt und ob es eventuell besondere Schwierigkeiten hat. In nachfolgenden individuellen Gesprächen mit auffällig gewordenen Kindern werden anhand geeigneter Fragestellungen und Materialien die spezifischen Schwierigkeiten des Kindes oder seine besondere Leistungsfähigkeit genauer eingegrenzt. Für die so festgestellten Besonderheiten werden nun förderliche Herausforderungen in Form von Einzelaufträgen, Gruppenaufträgen, Klassenaufträgen oder Partner- und Gruppenspielen für die Kinder bereitgestellt, die an die Ergebnisse des Gesprächs angepasst werden.

Dieses Vorgehen soll am Beispiel eines Kindes, das in einem schriftlichen Test auffällig wurde, illustriert werden.

Maria[1] ist ein achtjähriges Mädchen am Ende des zweiten Schuljahres. Im schriftlichen Test zeigte sie Auffälligkeiten bei der Bearbeitung von Größen, hier Geldwerten. Die Aufgabenstellungen stammten aus dem Diagnosebegleiter (Guder et. al. 2007 a). Sie konnte zunächst mit richtigen Münzwerten den geforderten Geldbetrag darstellen, bei der Darstellung durch 1ct Münzen kam sie nicht zum richtigen Ergebnis. Ursächlich könnte hier sein, dass der Platz für eine vollständige Lösung mit 1ct Münzen nicht reichte. Maria blieb nicht durchgängig bei den zulässigen Münzgrößen und verwendete später Einzelbeträge (30 ct), die es nicht als Münze gibt. Die Summe betrug aber trotzdem 1 €. Maria besitzt also Rechenkompetenzen im Raum bis 100 mit vollen Zehnern und besitzt die Kenntnis, dass 1 € gleich 100 ct sind.

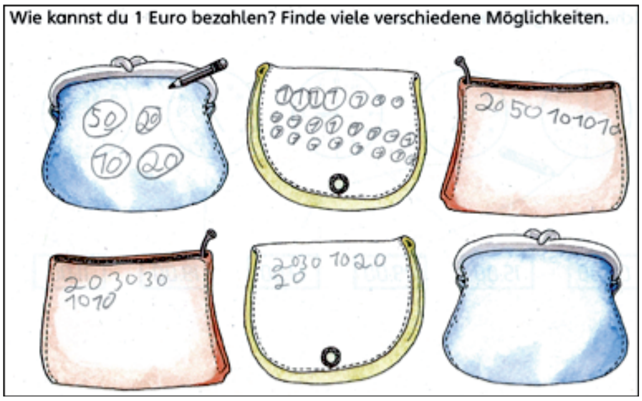


Abbildung von Testheft 2.2A (Guder et. al. 2007a, S. 2), © Ernst Klett Verlag GmbH, Eintragungen ergänzt.

Nach der Auswertung des schriftlichen Tests führte die Fachkraft ein kurzes Interview. Dieses wurde, anders als es im Alltag notwendig wäre, videographiert und transkribiert. Maria bekam den Auftrag, mit zwei 5 €-Scheinen und mehreren Münzen in allen Nennwerten von 1 ct bis 2 € einen Geldbetrag von 10 € zu legen. Dieser Betrag wurde ihr auch als Bild eines 10 € Scheins präsentiert. Sie legt daraufhin zwei 5 €-Scheine.

Daran schließt sich folgendes Gespräch[2] an:

I [v]	OK, Super, Kannst Du das auch noch auf eine andere Art?		
I [nv]	Legt die zwei 5€ Scheine zurück		
Ma [v]		mhm	
Ma [nv]			Schiebt die Münzen hin und her und

Ma [v]		So geht das.
Ma [nv]	legt anschließend sieben 1 ct und eine 2 ct Münze auf den Tisch	Schiebt die Münzen zusammen

I [v]	mhm OK. Und sind das 10 €?			
Ma [v]		((3s))	Ja.	((12s))
Ma [nv]				Zählt die Münzen einzeln nach Dabei tippt sie auf jede 1 ct Münze einzeln und.

Ma [v]	
Ma [nv]	anschließend zweimal auf die 2 ct Münze, Holt eine weitere 1 ct Münze dazu, die zunächst herunterfällt, und hebt sie wieder auf

I [v]	Geht das noch auf eine andere Art?	
Ma [v]		((55 s))
Ma [nv]		Legt alle Münzen und Scheine auseinander, dreht sie so, dass die Zahlen oben

[1] Name geändert.
[2] Das Transkript wurde in Partiturschreibweise mit verbalen und nonverbalen Äußerungen erstellt. Dabei stehen gleichzeitige Äußerungen und Handlungen untereinander. Die Länge der einzelnen Abschnitte im Transkript sagt dabei nichts über die Länge der Äußerung aus. Pausen werden durch Angabe der Länge als in Doppelklammern ein-geschlossene Zeitdauer in Sekunden angegeben. Beispiel ((3 s)) bedeutet eine Pause von 3 Sekunden. I[v] bedeutet „Verbale Äußerung des Interviewers", I[nv] eine „nonverbale Äußerung" bzw. Handlung des Interviewers. Analoges gilt für M[v] und M[nv].

I [v]		Das sind 10 €?	
Ma [v]			((10s))
Ma [nv]	liegen, nimmt 5€, 2 x 2 ct und 1 x 1 ct		Tipp einmal auf 5€, je zweimal auf 2 ct und einmal auf 1 ct. Nickt.

Man kann erkennen, dass Maria auf der reinen Zahlenebene die Zahl 10 zerlegen kann. Jedoch ist auffällig, dass ihr das Verständnis für die unterschiedlichen Werte von Euro und von Cent fehlen.

Im anschließenden Interviewteil, der ihr Verständnis für die Geldwerte genauer untersucht, wird bestätigt, dass es bei Maria Verwechslungen zwischen der physischen Größe und dem Wert von Münzen gibt. Sie ist jedoch in der Lage, die Münzen in ihrer Kaufkraft zu vergleichen und in die richtige Reihenfolge zu bringen.

I [v]		Kannst Du die in eine Reihe legen? Was ist die wertvollste Münze?
I [nv]	Legt 2 ct, 5 ct, 20 ct, 50 ct, 1 € und 2 € unsortiert auf den Tisch	

I [v]	
Ma [nv]	Bringt schnell die ct Münzen in Reihenfolge, legt die Euromünzen übereinander und legt sie neben das 50 ct Stück. Tauscht 1€ und 50 ct.

I [v]	Und wofür kannst Du am meisten kaufen?		Und am zweitmeisten?		Und am
Ma [nv]		Nimmt 2€ aus der Reihe		Nimmt 1 €	

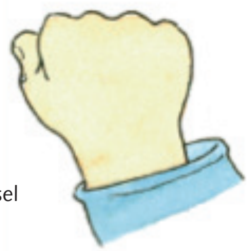
I [v]	drittmeisten?		Am viertmeisten?		Und am fünftmeisten?		Gut.
Ma [nv]		Nimmt 50 ct		Nimmt 20 ct		Nimmt 5 ct	

Auf den spezifischen Förderbedarf von Maria, die Geldwerte von Münzen und Geldscheinen sicher zu kennen sowie Euro und Cent unterscheiden zu lernen, wird nun durch geeignete Herausforderungen eingegangen. So bieten sich Partnerarbeiten oder Kleingruppenarbeit an, in deren Verlauf Maria direkte Rückmeldungen zu ihren Lösungsversuchen bekommt. Anknüpfend an ihre Rechenkenntnisse, könnte beispielsweise folgendes Vorgehen in den beschriebenen Arbeitsformen mit Unterstützung durch die Lehrkraft gewählt werden:

Arbeits-/Sozialform: Partner- oder Gruppenarbeit (bis 5 Personen)

Zusätzliches Material: Rechengeldmünzen

Durchführung: Ein Kind nimmt zwei Münzen in die Hand und addiert ihren Wert. Dann legt es die geschlossene Hand mit den Münzen auf den Tisch oder auf seinen Schoß: „Ich habe mit zwei Münzen … Euro (Cent) in der Hand. Welche Münzen sind es?“ Wer es herausfindet, darf das nächste Rätsel stellen.



Variation: Die Übung mit drei Münzen durchführen.

Abbildung von Karte Grün Dreieck 1 (Guder et. al. 2007c) © Ernst Klett Verlag GmbH

Die integrierte Vorgehensweise ermöglicht nicht nur die Bestimmung von Defiziten, sondern liefert Erkenntnisse über die vorhandenen Kompetenzen und nutzt sie zur Einleitung angemessener individueller Fördermaßnahmen.

Hier besteht die Möglichkeit, Herausforderungen zu nutzen, die es den Kindern ermöglichen, ihre vorhandenen Kompetenzen einzusetzen, um die weitergehenden Problemstellungen zu bearbeiten und so ihre jeweiligen Kompetenzen weiter zu entwickeln.

3 Fordern und Fördern

Lernfortschritte und Kompetenzerweiterungen können bei allen Kindern unabhängig von ihrem Leistungsstand nur dann gelingen, wenn sie mit Anforderungen konfrontiert werden, die noch nicht verfügbare Kompetenzen zur Bewältigung erfordern, sie also Fähigkeiten entwickeln müssen, die ihren gegenwärtigen Kenntnisstand übersteigen. Insofern sind Förderung und Forderung nur zwei Facetten der gleichen Idee und stellen eine Herausforderung an die Kinder und ihre gegenwärtigen Kompetenzen dar. Dabei muss jedoch darauf geachtet werden, dass die vorhandenen Kompetenzen zur Bewältigung der Herausforderungen nur in einem Maße überschritten werden, das nicht zu einer Überforderung führt. Allerdings darf dies nicht dazu führen, dass die Probleme in kleine und kleinste Schritte zerlegt werden, so dass die Kinder quasi „am Nasenring" durch das Problemfeld geführt werden. Ziel ist es vielmehr, dass sie Grundvorstellungen selbst entwickeln, erweitern und in größere Sinnzusammenhänge stellen. Unterschiede zwischen Fordern und Fördern bestehen daher hauptsächlich in graduellen Abweichungen im Anspruch der individuellen Herausforderungen. Diese lassen sich durch Differenzierung realisieren. Auch wenn die Prinzipien der Differenzierung noch keine Lernerfolge garantieren, zeigen „*Erfahrungsberichte aus Skandinavien und aus Leuchtturmschulen in Deutschland …, dass adaptiver Unterricht funktionieren kann.*" (Helmke 2009, S. 258, Hervorhebung im Original) Differenzierung bietet somit Chancen, angemessen auf individuelle Schwierigkeiten zu reagieren. Dazu lassen sich für die Grundschule zwei Hauptformen unterscheiden. Zum einen gibt es die äußere Differenzierung, bei der die Klassen in Gruppen verschiedener Kompetenzstufen unterteilt und angepasst an die Kompetenzstufen unterrichtet werden. Diese Form besitzt in der Grundschule eher randständige Bedeutung und erfolgt höchstens in zusätzlichen Förderstunden. Zum anderen gibt es die im Grundschulunterricht meist praktizierte innere Differenzierung, bei der innerhalb eines Klassenverbandes Kindern unterschiedliche Aufgabenstellungen und Aufträge gegeben werden, die an ihre Kompetenz angepasst sind und die meist mit Attributen wie leicht, mittel und schwer belegt sind oder es gibt einheitliche Lernangebote, die auf unterschiedlichen Niveaus bearbeitet werden können. Diese Lernangebote im Rahmen der so genannten natürlichen Differenzierung enthalten nach Krauthausen und Scherer eine einheitliche, übergeordnete Problemstellung, die inhaltlich hinreichend komplex ist und fachlich wohlüberlegt so gerahmt ist, dass sie Fragestellungen unterschiedlicher Schwierigkeit bietet. Hierbei haben die Kinder die Freiheit, ihre eigenen Vorgehensweisen auszuwählen und eigene Hilfsmittel zu nutzen. Daneben ist die Kommunikation über die gewählten Lösungswege integraler Bestandteil, sodass die Kinder mit alternativen Sichtweisen konfrontiert werden und sie ihr Methodenrepertoire erweitern können. Neben der Erweiterung ihrer Kompetenzen wird hier auch die Entwicklung einer realistischen Selbsteinschätzung gefördert (vgl. Krauthausen/Scherer 2010, S. 5 - 6). Um dies zu gewährleisten, müssen Kinder auch aufgefordert werden, nicht immer nur den einfachsten Weg zu wählen, sondern sich auch anspruchsvollere Aspekte der Problemstellung vorzunehmen

Im Folgenden sollen zwei Ansätze von Wittmann sowie von Förster und Grohmann vorgestellt werden, die eine natürliche Differenzierung ermöglichen. Wittmann konzipiert sogenannte Substanzielle Lernumgebungen, und Förster und Grohmann entwickeln diese zu einem Konzept zur Planung von einzelnen Unterrichts(doppel)stunden weiter, für die natürlich differenzierende Aufgabenstellungen entworfen werden, die allen Kindern Kompetenzerweiterungen ermöglichen.

3.1 Substanzielle Lernumgebungen

Um Lernprozesse und Kompetenzerweiterungen bei Kindern anzustoßen, und damit letztendlich Lernerfolge möglich zu machen, schlägt Wittmann sogenannte Substanziellen Lernumgebungen vor, für die er Folgendes fordert:

1. Substanzielle Lernumgebungen müssen zentrale Ziele, Inhalte und Prinzipien des Mathematikunterrichts repräsentieren.
2. Substanzielle Lernumgebungen müssen reiche Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten von SchülerInnen bieten.
3. Substanzielle Lernumgebungen müssen flexibel sein und leicht an die speziellen Gegebenheiten einer bestimmten Klasse angepasst werden können.
4. Substanzielle Lernumgebungen müssen mathematische, psychologische und pädagogische Aspekte des Lehrens und Lernens in einer ganzheitlichen Weise integrieren und daher ein weites Potential für empirische Forschungen bieten. (Wittmann 1998, S. 337-338)

Die Aufgabenstellungen und Herausforderungen in Substanziellen Lernumgebungen sollten sich in diesem Sinne also mit grundlegenden Themen des Mathematikunterrichts beschäftigen. Eine Auseinandersetzung mit sehr engen Aufgabenstellungen oder Einzelfällen ist nur dann angebracht, wenn sich daran über den Einzelfall hinausgehende allgemeine Erkenntnisse gewinnen lassen.

Darüber hinaus ist es wesentlich, dass die Auseinandersetzung mit der Aufgabenstellung auf verschiedene Arten erfolgen kann und somit der großen Heterogenität der Kinder in einer Klasse genügt. Außerdem müssen die verschiedenen mathematischen Aktivitäten Erkenntnisse über mathematisches Vorgehen ermöglichen, um neue Operationen anzubahnen oder bereits bekannte zu festigen. Durch probierendes Untersuchen von Zusammenhängen werden bei leistungsschwachen Kindern die Grundfertigkeiten geübt und bei leistungsstärkeren Kindern Erkenntnisse ermöglicht, die über die Einzelfälle hinausgehen.

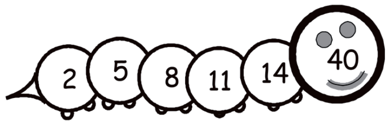
Die geforderte Flexibilität ist ein weiterer wesentlicher Aspekt, da unterschiedliche Gruppen von Lernenden unterschiedliche Bedürfnisse haben. Auch müssen die Anforderungen und ihre Präsentationen so gewählt sein, dass sie an verschiedene Ansprüche angepasst werden können und im Idealfall in verschiedenen Jahrgangsstufen mit veränderten Grundannahmen eingesetzt werden können.

Die vierte Forderung ist evident, da Lernumgebungen, die diese Forderungen verletzen, entweder nicht zum Lernen von **Mathematik** oder nicht zum **Lernen** von Mathematik geeignet sind.

Der letzte Nachsatz der vierten Forderung ist nur eine Folgerung aus dem vorhergehenden, da derartig gestaltete Lernumgebungen durch die unterschiedlichen Herangehensweisen selbstverständlich das Potential bieten, diese qualitativ oder quantitativ zu erfassen und empirische Kategorienbildung ermöglichen. Die Analyse eröffnet Erkenntnisse über das Potential von Aufgaben, die geforderten Kompetenzen und die Herangehensweise der Kinder, die sie bearbeitet haben. Die Aufgaben besitzen also auch diagnostisches Potential.

Das Konzept soll am Beispiel Rechenraupen erläutert werden, das auf eine von Steinbring (1995, 1997) beschriebene Übungsform zurückgeht.

In einer Rechenraupe wird wie folgt gerechnet:



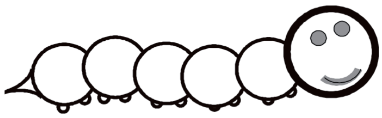
In das letzte Körperglied wird die Startzahl (im Beispiel die 2) geschrieben.

Die nächste Körperzahl ergibt sich aus der Startzahl plus der Additionszahl (hier die 3), die nächste Körperzahl ergibt sich aus der zweiten auch durch Addition von 3. Alle weiteren Körperzahlen werden genauso berechnet.

Um die Zielzahl im Kopf einer Rechenraupe auszurechnen, werden alle Zahlen im Körper addiert.

Dieses Aufgabenformat repräsentiert als zentrale Ideen der Mathematik

- arithmetische Folgen und Reihen,
- Rekursionen,
- Summenberechnung für arithmetische Folgen
- Addition und als Umkehrung die Subtraktion
- Multiplikation und als Umkehrung die Division
- funktionale Zusammenhänge

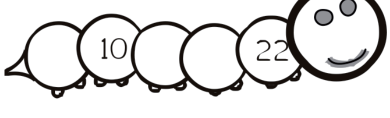


a) Versucht, die Startzahl und die Additionszahl so zu wählen, dass ihr möglichst nah an die Zielzahl 50 kommt.

b) Versucht, mehrere Lösungen für die Zielzahl 50 zu finden.

c) Schaut euch alle eure Zielzahlen an! Was stellt ihr fest?

d) Kann man auch die Zielzahl 66 treffen?



e) Bestimmt für die Zahlen oben die Additionszahl, die Startzahl und die Zielzahl.

Bei gegebener Startzahl und Additionszahl sind die mathematischen Aktivitäten zunächst beschränkt, gibt man hier jedoch beispielsweise zwei Körperzahlen vor, so muss durch Differenzbildung und Division die Additionszahl bestimmt werden. Durch Vorgabe der Zielzahl und durch die Suche nach Start- und Additionszahl wird durch systematisches Probieren eine Vielzahl an Additionen durchgeführt und die Rechenfertigkeit geübt. Gerade die Suche nach verschiedenen Möglichkeiten, eine bestimmte Zielzahl zu erreichen, berücksichtigt das Prinzip des entdeckenden, problemlösenden Lernens, denn jedes Kind kann seinen Weg zur Lösung des Problems selbst wählen. Weitere Variationsmöglichkeiten dieser Lernumgebung finden sich bei Steinbring (1995, 1997). Das Aufgabenformat zeigt, dass es mithilfe der Variationen an die

Bedürfnisse einer Lerngruppe angepasst werden kann und verschiedene Ziele verfolgt werden können.

Eine Fülle von weiteren Beispielen derartiger Substanzieller Lernumgebungen findet sich in den Veröffentlichungen des Projekts „mathe 2000“, insbesondere in den Handbüchern Produktiver Rechenübungen von Gerhard N. Müller und Erich Ch. Wittmann (1992, 1993). Weitere Quellen sind die Lernumgebungen von Nührenbörger und Pust (2006) sowie die Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte von Hengartner et. al. (2006) und von Hirt und Wälti (2008).

3.2 Natürliche Differenzierung durch Aufgabenöffnung

Will man als Lehrkraft nicht nur auf bereits vorliegende Lernumgebungen zurückgreifen, sondern selbst geeignete Umgebungen generieren, so bietet sich das Konzept von Förster und Grohmann an. Sie entwickelten ein Konzept zur Aufgabenöffnung ursprünglich zur Begabungsförderung, zeigen dabei aber auch das Potential auf, das ihr Vorgehen zur Förderung aller Kinder innerhalb des alltäglichen Mathematikunterrichts besitzt. Sie machen dabei folgende Grundannahmen zum mathematischen Gehalt, die denen von Wittmann für seine Substanziellen Lernumgebungen ähneln. Im Einzelnen fordern sie, dass *„die Offenheit in der Wahl der Hilfsmittel, der Lösungswege und der Ergebnisdarstellung … das Lösen der Ausgangsaufgabe und weiterer Anschlussprobleme Eigenproduktionen der Kinder“* (Förster/Grohmann 2010. S. 113) erlaubt bzw. fördert, und dass *„die reichhaltige mathematische Substanz und inhaltliche Offenheit der Ausgangsaufgabe … vielfältige Möglichkeiten zum Mathematiktreiben“* (Förster/Grohmann 2010, S. 113) bietet.

Diesen Forderungen stellen Förster und Grohmann die beiden folgenden, weniger auf den mathematischen Gehalt als auf das Wecken von Interesse und die Verständlichkeit der Aufgabenstellung gerichteten Kriterien voran, nämlich dass *„der jeweilige Inhalt einer (Ausgangs-)Aufgabe … Neugier und Interesse … wecken“* (Förster/Grohmann 2010. S. 113) soll und dass die *„Ausgangsaufgabe … leicht verständlich [ist], sodass alle Kinder die Chance haben, sich mit der Aufgabe erfolgreich auseinanderzusetzen.“* (Förster/Grohmann 2010, S. 113). Neben der Erfüllung dieser Bedingungen sollen die Aufgabensequenzen, die durch Öffnung entstehen, so entwickelt werden, dass sie in einer Unterrichtsstunde bearbeitet werden können. Ziel dieser Aufgabenstellungen ist das Üben. Die Öffnung ermöglicht aber auch, dass andere Kinder bei der Bearbeitung weitergehende Erkenntnisse gewinnen und ihre Kompetenzen erweitern können.

Als Ausgangspunkte der Öffnung schlagen Förster und Grohmann zum einen geschlossene Aufgaben aus Schulbüchern vor, deren curriculare Anbindung in der Regel gegeben ist, und zum anderen „Knobel-“ oder Problemaufgaben. Stammen letztere nicht aus Schulbüchern, so sollte zunächst die curriculare Einbindung geklärt werden.

Förster und Grohmann schlagen zur Gewinnung folgendes Vorgehen vor:

Vorgehensweisen für das Erstellen geöffneter Aufgabensequenzen	
Ausgangspunkt: Geschlossene Aufgaben (z. B. aus Schulbüchern)	Ausgangspunkt: „Knobel“- bzw. Problemaufgaben (z. B. aus Aufgabensammlungen)
a) Analyse des mathematischen Gehalts, der über den Übungseffekt hinausweist bzw. hinausweisen kann	a) Analyse der Möglichkeiten curricularer Einbindung auf Grundlage verschiedener Lösungswege

b) Formulierung einer (meist) geöffneten Problemstellung, die neben dem Übungsgehalt auch den Zugang zum mathematischen Gehalt (implizit) anregt	b) Analyse des Übungspotenzials bei probierender Bearbeitung, des Lösungsprozesses und der mathematischen Struktur der Aufgabe
c) Analyse weiterer mögl. auch andersartiger Lösungsmöglichkeiten für die Kinder	
d) Ausweitung der Fragestellung, d. h. weitere mögl. viele Fragen finden, mit unterschiedlichen Bedingungen (Vorrausetzungen, Einschränkungen ...) für die Problemstellung	
e) Zusammenfassen aller Fragen in (möglichst) einer einzigen Fragestellung	
f) Ein leichtes Ausgangsproblem wird erstellt, dessen Bearbeitungszeit für alle Schülerinnen und Schüler ungefähr gleich ist, ggf. Verständnisfragen klärt und zu probierenden Ansätzen anregt.	
g) Mögliche offene/geöffnete Anschlussfragen werden konzipiert.	

(Förster/Grohmann. 2010. S. 114, Hervorhebungen aus dem Original)

Das folgende Aufgabenpäckchen aus dem Übungsheft zu Welt der Zahl 4 dient als Ausgang für die Öffnung einer **„geschlossene Aufgabe"**.

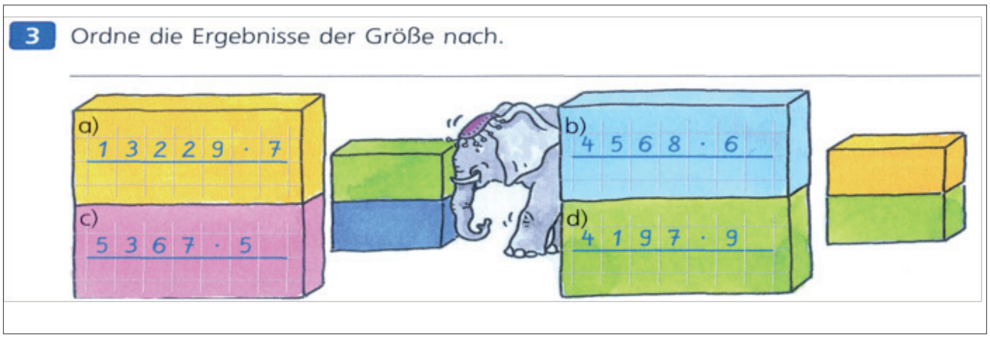


Abbildung aus Rinkens/Hönisch 2006, S. 29 © Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH

Ziel und **mathematischer Gehalt** (a) dieser Aufgabe ist originär das Üben schriftlicher Multiplikation vier- bis fünfstelliger Faktoren mit einem einstelligen zweiten Faktor sowie das Sortieren fünfstelliger Zahlen der Größe nach. Darüber hinaus könnte man in eine solche Übung auch noch den Einfluss der Stellen, an denen Ziffern stehen, auf die Größe der Ergebnisse mit untersuchen.

Als **geöffnete Problemstellung** (b) bietet sich hier an, nicht mit willkürlich vorgegebenen Zahlen zu hantieren, sondern die Kinder erkunden zu lassen, bei welcher Anordnung von gegebenen Ziffern das Ergebnis am größten wird. Eine entsprechende offene Fragestellung könnte dann folgende sein:

Ihr habt fünf Ziffernkärtchen mit den Ziffern 2, 3, 4, 7 und 9 zur Verfügung. Daraus bildet Ihr eine vierstellige Zahl und multipliziert sie mit der fünften Zahl. Bestimmt das größte Produkt.

Um diese Aufgabenstellung zu bearbeiten, könnten die Kinder unter anderem folgende **Lösungsmöglichkeiten** (c) wählen. Sie könnten systematisch probierend herangehen. Es könnten aber auch Kinder auf die Idee kommen, dass das Produkt am größten wird, wenn aus den Ziffern für den ersten Faktor die größte mögliche Zahl gebildet wird, wenn also die vier Ziffern des ersten Faktors der Größe nach von groß nach klein sortiert sind. Die Kinder müssten dann nur noch die fünf Wahlmöglichkeiten der Ziffern für den zweiten Faktor überprüfen.

Als mögliche **weitere Fragen** (d) könnte man untersuchen, wie groß die Änderungen im Ergebnis sind, wenn man zwei der vorhandenen Ziffern gegeneinander tauscht und welche Gesetzmäßigkeiten dabei auftreten, oder welches das größte Ergebnis ist, wenn man die Vorgabe vierstellige und einstellige Faktoren wegfallen lässt und auch die Multiplikation eines dreistelligen mit einem zweistelligen Faktor zulässt.

Als zentrale **einzige Fragestellung** (e) bietet sich hier der anfänglich bereits formulierte Erkundungsauftrag nach dem größtmöglichen (kleinstmöglichen) Ergebnis bei der Multiplikation von einem vierstelligen und einem einstelligen Faktor an. Werden die Kinder dabei auch aufgefordert, Vermutungen anzustellen, zu überprüfen und gegebenenfalls zu begründen, so werden durch diese Fragestellung neben der Übung des schriftlichen Multiplizierens auch prozessbezogene Kompetenzen in verschiedenen Anforderungsniveaus gefordert.

Als **leichtes Ausgangsproblem** (f), das von allen Kindern mit vergleichbarem Aufwand bearbeitet werden kann, soll eine Aufgabe dienen, die den Fokus auf den Größenvergleich verschiedener Multiplikationsaufgaben aus Zahlen mit permutierten Ziffern lenkt.

Als **geöffnete/offene Anschlussfragen** (g), die Erkenntnisse über das Üben der schriftlichen Multiplikation hinaus ermöglichen, bietet es sich an, tatsächlich die oben genannten Erweiterungen der Fragestellung auf quantitative Auswirkungen von Ziffernvertauschungen oder die Untersuchung von Aufgaben mit zwei- und dreistelligen Faktoren zu wählen.

Aus diesen Analysen lässt sich dann folgende Aufgabensequenz konstruieren:

a) Nehmt vier verschiedene Ziffern und bildet daraus eine vierstellige Zahl.
Nehmt eine fünfte Ziffer und multipliziert die vierstellige Zahl schriftlich damit.
Bildet aus den fünf Ziffern drei weitere Multiplikationsaufgaben.
Sortiert die Ergebnisse der Größe nach.

b) Nehmt eine der Aufgaben und vertauscht in der vierstelligen Zahl zwei der vorhandenen Ziffern.
Multipliziert nun. Vergleicht die Ergebnisse.
Vermutet, wann das Ergebnis größer wird. Schreibt eure Vermutung auf und überprüft sie.

c) Nehmt wieder fünf verschiedene Ziffern und sucht die Multiplikationsaufgabe einer vierstelligen mit einer einstelligen Zahl aus diesen Ziffern mit dem größten Ergebnis.

Beispiel einer geöffneten Aufgabensequenz zu einer geschlossenen Schulbuchaufgabe. Diese Aufgabe wird hier ohne schmückendes Beiwerk oder Raster zum Eintragen vorgestellt, ggf. sollte man geeignete Ergänzungen vornehmen.

Die nebenstehende Knobelaufgabe von Renate Rasch (2003, S. 97) dient als Ausgangspunkt zur Entwicklung einer geöffneten Aufgabensequenz:

9. Geschichte: Quicki las in einer Woche ein Buch von 133 Seiten.
Am Montag las sie einige Seiten und von da ab jeden Tag 5 Seiten mehr als am Tag davor. Am Sonntag wurde sie fertig.
Wie viele Seiten las sie am Montag?

Curricular (a) lässt sich diese Aufgabe einerseits bei den prozessbezogenen Kompetenzen, insbesondere beim Problemlösen, einordnen. Inhaltlich kann diese Aufgabe zur Leitidee „Zahlen und Operationen“, Kompetenzbereich „Rechenoperationen verstehen und beherrschen“ und zur Leitidee „Muster und Strukturen“, Kompetenzbereich „Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen“ zugeordnet werden. Je nach gewähltem Lösungsweg müssen Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 1000 durchgeführt, aber auch Divisionsvorstellungen entwickelt werden. Bei einem probierend-korrigierenden Herangehen (Prinzip des falschen Ansatzes) werden viele Additionen von 5 durchgeführt. Anschließend müssten sieben Zahlen einer arithmetischen Progression addiert werden. Gegebenenfalls muss ein Kind seine anfänglich gesetzte Seitenzahl für den ersten Tag korrigieren. Durch diese Korrektur könnte durch das Erkennen operativer Zusammenhänge das Repertoire an verfügbaren Lösungsstrategien erweitert werden. Das **Übungspotential** (b) bei dem Vorgehen entsprechend des Prinzips des falschen Ansatzes bestünde trotzdem im Wesentlichen im Üben der Addition von ein- bis dreistelligen Zahlen.

Andersartige Lösungsmöglichkeiten (c) der Kinder könnten sich aus der Erkenntnis ergeben, dass das Ergebnis immer das Siebenfache der mittleren Zahl ist. Sie könnten dann aus 133 : 7 = 19 die anderen Zahlen der arithmetischen Progression durch Addition bzw. Subtraktion von 5 finden. Auf eine solche Vorgehensweise könnten die Kinder auch kommen, wenn sie überlegen würden, wie viele Seiten das Kind durchschnittlich jeden Tag lesen muss, und dann aus dieser Zahl die anderen Zahlen bestimmen würden. (Eine ausführlichere Darstellung der Zugangsmöglichkeiten findet sich bei Winter, der diesen Aufgabenkontext bereits 1997 vorschlug. (vgl. Winter 1997, Winter 2003))

Ausweitungen (d) dieser Fragestellung wären möglich, indem nicht nur nach der Startzahl, sondern auch nach dem Zuwachs von Tag zu Tag gefragt würde. Auch die Frage nach den überhaupt nur zu erreichenden Seitenzahlen bei diesem Vorgehen, böte eine Erweiterung der Ausgangsfragestellung.

Die Beschränkung auf die **einzelne Fragestellung** (e), welche Zahlen als Summe von sieben aufeinander folgenden Zahlen einer arithmetischen Folge überhaupt erreichbar sind, liefert viele Möglichkeiten zum Üben der Addition zweistelliger Zahlen, bietet aber auch die Chance zu weitergehenden Erkenntnissen.

Eine geeignete leicht verständliche **Ausgangsaufgabe** (f) sollte hier die Idee der Bildung der arithmetischen Folge und des Aufaddierens an einem Beispiel sein.

Als **offenere Anschlussfragestellung** (g) bietet es sich nun an, zu untersuchen, welche Seitenzahlen auch bei Veränderung der Anzahl von Lesetagen erreichbar sind.

Insgesamt ergibt sich dann folgende Sequenz:

a) Nele las in der letzten Woche das Buch „Ponyhofgeschichten“. Am Montag las sie vier Seiten. Weil das Buch so spannend war, las sie jeden weiteren Tag fünf Seiten mehr als am Vortag.

b) Wie viele Seiten las sie am Dienstag, am Mittwoch, am Donnerstag, am Freitag, am Samstag, am Sonntag?

c) Wie viele Seiten hatte das ganze Buch?

d) Kann Nele auch ein Buch mit 147 Seiten so lesen?

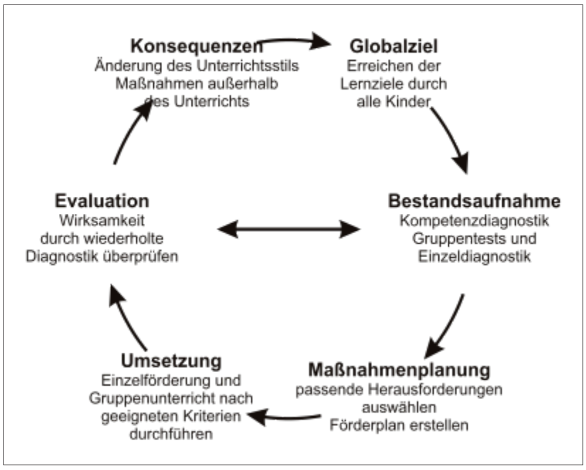
e) Welche Seitenzahlen muss ein Buch haben, damit Nele es so lesen kann?

Beispiel einer geöffneten Aufgabensequenz zu einer Knobelaufgabe. Diese Aufgabe wird hier ohne schmückendes Beiwerk oder Raster zum Eintragen vorgestellt, ggf. sollte man geeignete Ergänzungen vornehmen.

Die Substanziellen Lernumgebungen im Sinne Wittmanns und die geöffneten Aufgabensequenzen im Sinne Försters und Grohmanns bieten aufgrund der offeneren Fragestellungen gute Möglichkeiten, die schriftlichen oder mündlichen Äußerungen der Kinder zu den Fragestellungen sowohl in Hinblick auf Rechenkompetenzen als auch auf prozessbezogene Kompetenzen zu deuten und Erkenntnisse über deren Vorhandensein zu gewinnen. An guten Aufgaben können daher nicht nur die Kinder viel lernen, sondern die Lehrkräfte viel über die Kompetenzen der Kinder erfahren.

4 Schlussbemerkung

Kompetenzdiagnostik und Lernanregungen befinden sich in einer gegenseitigen Abhängigkeit, wie der folgende Qualitätszirkel zeigt.



Die Ergebnisse der Kompetenzfeststellungen führen zu einer geeigneten Planung zur Weiterentwicklung der Kompetenzen und gegebenenfalls zu einem Förderplan. Dabei können einerseits individuelle Förderungen durch geeignete Aufgabenstellungen für das einzelne Kind erfolgen, die gezielt die festgestellten Bedürfnisse des Kindes bedienen und ihm Lernerfolge ermöglichen. Andererseits können geeignete Aufgabenstellungen im Sinne der natürlichen Differenzierung die Kinder individuell, trotz heterogenem Leistungsniveau in der Klasse, herausfordern.

In einem weiteren Diagnosedurchgang kann und sollte die Wirksamkeit der unternommenen Maßnahmen durch Analysen der schriftlichen Produkte der Kinder während der Umsetzung und gegebenenfalls durch weitere Tests überprüft und evaluiert werden. Zeigt sich dabei eine nicht ausreichende Wirksamkeit, so muss einerseits der eigene Unterrichtsstil als möglicher Einflussfaktor näher in den Blick genommen werden, andererseits muss überlegt werden, ob für bestimmte Kinder eine sonderpädagogische Förderung innerhalb der Schule eingeleitet wird oder der schulpsychologischen Dienst zur Unterstützung heranzuziehen ist.

Die zentralen Ideen zur Feststellung von mathematischen Kompetenzen und zu ihrer Entwicklung möchte ich zum Abschluss in folgendem Leitsatz zusammenfassen:

Gute Aufgaben provozieren aufschlussreiche Reaktionen!

5 Literatur

Bos, W. (2008). *TIMSS 2007 Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich.* Münster: Waxmann.

Bos, W., Lankes, E.-M., Prenzel, M., Schwippert, K., Valtin, R. & Walther, G. (Hrsg.) (2003). *Erste Ergebnisse aus IGLU. Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich. Münster:* Waxmann.

Büchter, A., & Leuders, T. (2011). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln: Lernen fördern - Leistung überprüfen.* (5. Auflage). Berlin: Cornelsen.

Förster, F. & Grohmann, W. (2010). Geöffnete Aufgabensequenzen zur Begabungsförderung im Mathematikunterricht. In: T. Fritzlar & F. Heinrich (Hg.): *Kompetenzen mathematisch begabter Grundschulkinder erkunden und fördern* (S. 111-126). Offenburg: Mildenberger.

Gallin, P. & Ruf, U. (1998). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik.* Seelze: Kallmeyer.

Gallin, P. (1999). *Dialogischer Mathematikunterricht: Lernen mit Kernideen und Reisetagebüchern.* Referat an der BLK-Tagung vom 22./23. 11. 1999 in Gotha http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienBT/gallin.pdf (Download 22.10.2010)

Gerster, H.-D. (1982) *Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren : Diagnose u. Therapie.* Freiburg im Breisgau; Basel ; Wien : Herder

Gölitz, D., Roick, T. & Hasselhorn, M. (2006). *Deutscher Mathematiktest für vierte Klassen (DEMAT 4).* Göttingen: Hogrefe.

Grundschule Hude – Süd. (2006). *Dokumentation Individuelle Lernentwicklung Klassenliste Mathematik Klasse 1* http://www.nibis.de/nli1/gohrgs/ile/materialien/GSHude_Sued/GS%20Hude-S%FCd%20Klasse1%20Dokumentation%201-5.pdf (Download 10.10.2010)

Grundschulverband. (2004). *Programm – Satzung – Veröffentlichungen.* Frankfurt: Grundschulverband.

Guder, K.-U., Herrmann, C., Lüthje, T. & Pyroth, S. (2007a). *Diagnosebegleiter – Mathematik. Klassentesthefte 1. Schuljahr. Teil 1 und Teil 2.* Stuttgart: Klett.

Guder, K.-U., Herrmann, C., Lüthje, T. & Pyroth, S. (2007b). *Diagnosebegleiter – Mathematik. Klassentesthefte 2. Schuljahr. Teil 1 und Teil 2.* Stuttgart: Klett.

Guder, K.-U., Herrmann, C., Lüthje, T. & Pyroth, S. (2007c). *Diagnosebegleiter – Mathematik. Einzeltestkartei 1./2. Schuljahr.* Stuttgart: Klett.

Guder, K.-U., Herrmann, C., & Pyroth, S. (2007d). *Diagnosebegleiter – Mathematik. Förderkartei 1./2. Schuljahr.* Stuttgart: Klett.

Guder, K.-U., Krüger, H. & Pyroth, S. (2008a). *Diagnosebegleiter – Mathematik. Lehrerhandreichungen 1.-4. Schuljahr.* Stuttgart: Klett.

Guder, K.-U., Krüger, H. & Pyroth, S. (2008b). *Diagnosebegleiter – Mathematik. Klassentesthefte 3.-4. Schuljahr. Jeweils Teile 1 und 2.* Stuttgart: Klett.

Guder, K.-U., Pyroth, S., Krüger, H., Dreier, N. & Winkelmann, I. (2008c). *Diagnosebegleiter – Mathematik. Einzeltestkartei 3./4. Schuljahr.* Stuttgart: Klett.

Guder, K.-U., Pyroth, S., Krüger, H., Dreier, N. & Winkelmann, I. (2008d). *Diagnosebegleiter – Mathematik. Förderkartei 3./4. Schuljahr.* Stuttgart: Klett.

Helmke, A. (2009). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität.* Seelze-Velber: Kallmeyer.

Hengartner, E., Hirt, U., Wälthi, B. & Primarschulteam Lupsingen. (2006). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte: natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht,* 1. Aufl., Zug: Klett und Balmer.

Hirt, U. & Wälthi, B. (2008). *Lernumgebungen im Mathematikuntericht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte.* Seelze: Klett/Kallmeyer.

Jordan, A. & vom Hofe, R. (2008). *Diagnose von Schülerleistungen. In: mathematik lehren 150,* 4-12.

KMK (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland). (2005) *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4).* München, Neuwied: Luchterhand.

Krajewski, K., Küspert, P. & Schneider, W. (2002). *Deutscher Mathematiktest für erste Klassen (DEMAT 1+).* Göttingen: Hogrefe.

Krajewski, K., Liehm, S. & Schneider, W. (2004). *Deutscher Mathematiktest für zweite Klassen (DEMAT 2+).* Göttingen: Hogrefe.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2010). *Umgang mit Heterogenität. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule. Handreichung des Programms SINUS an Grundschulen.* Kiel: IPN-Materialien.

Lorenz, J. H. (2000). *„Aus Fehlern wird man … Irrtümer in der Mathematikdidaktik des 20. Jahrhunderts". Grundschule, 32* (1), 19 – 22.

Lorenz, J. H. (2006). *Hamburger Rechentest. Manual.* Hamburg.

Niedersächsischen Kultusministerium. (2006). *Kerncurriculum Schuljahrgänge 1-4. Mathematik.* Hannover. (http://db2.nibis.de/1db/cuvo/datei/kc_gs_mathe_nib.pdf)

Nührenbörger, M. & Pust, S. (2006). *Mit Unterschieden rechnen. Lernumgebungen und Materialien für einen differenzierenden Anfangsunterricht Mathematik,* Seelze: Klett/Kallmeyer.

Peter-Koop, A. Wollring, B., Spindeler, B. & Grüßing, M . (2007). E*lementarMathematisches BasisInterview.* Offenburg: Mildenberger.

Radatz, H. (1980). *Fehleranalysen im Mathematikunterricht. Braunschweig,* Wiesbaden: Vieweg.

Rasch, R. (2003). *42 Denk- und Sachaufgaben: Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren,* 1. Aufl. , Seelze-Velber: Kallmeyer.

Rinkens, H.-D., Hönisch, K. (2006). *Welt der Zahl 4. Arbeitsblätter.* Ausgabe Nord. Braunschweig: Schroedel.

Roick, T., Gölitz, D. & Hasselhorn, M. (2004). *Deutscher Mathematiktest für dritte Klassen (DEMAT 3+).* Göttingen: Hogrefe.

Selter, C. & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen.* Leipzig: Klett Grundschulverlag

Steinbring, H. (1995). Zahlen sind nicht nur zum Rechnen da! Wie Kinder im Arithmetikunterricht strategisch-strukturelle Vorgehensweisen entwickeln. In: G. N. Müller & E. C. Wittmann (Hg.). *Mit Kindern rechnen* (S. 225-239). Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule – Der Grundschulverband - e. V.

Steinbring, H. (1997). Beziehungsreiches Üben – ein arithmetisches Problemfeld. *mathematik lehren, 83* (8.), S. 59-63.

Sundermann, B. & Selter, Ch. (2006) *Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Winter, H. (1997). Problemorientierung des Sachrechnens in der Primarstufe als Möglichkeit, entdeckendes Lernen zu fördern. In: P. Bardy (Hg.), *Mathematische und mathematikdidaktische Ausbildung von Grundschullehrerinnen/-lehrern* (S. 57-92). Weinheim: Deutscher Studienverlag.

Winter, H. (2003). ›Gute Aufgaben‹ für das Sachrechnen. In: M. Baum & H. Wielpütz (Hg.), *Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch* (S. 177-183). Seelze: Klett/Kallmeyer.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen Bd. 2. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen.* Stuttgart; Düsseldorf; Berlin; Leipzig: Klett.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1993). *Handbuch produktiver Rechenübungen Bd. 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins.* - 2., überarb. Aufl.: Stuttgart; Düsseldorf; Berlin; Leipzig: Klett.

Wittmann, E. C. (1998). *Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikstruktur. Beiträge zur Lehrerbildung* 16 (3), S. 329-42.

Zentrum für Empirische Pädagogische Forschung. VERA. http://www. uni-landau.de/vera/index.htm (zuletzt aufgerufen 13.08.2011)

Partner des Programms *SINUS an Grundschulen*

Programmträger: IPN, Kiel
Projektleitung: Prof. Dr. Olaf Köller
www.ipn.uni-kiel.de

SINUS an Grundschulen
Projektkoordination am IPN: Dr. Claudia Fischer
Tel. +49(0)431/880-3136
cfischer@ipn.uni-kiel.de
www.sinus-an-grundschulen.de

Programmkoordination für die Länder durch das
Ministerium für Bildung und Kultur
des Landes Schleswig-Holstein (MBK)
Dr. Kai Niemann
www.schleswig-holstein.de/MBK/DE/MBK_node.html

Serverbetreuung: Deutsches Institut für Internationale
Pädagogische Forschung (DIPF)
www.dipf.de

ISBN für diese Handreichung
978-3-89088-216-1