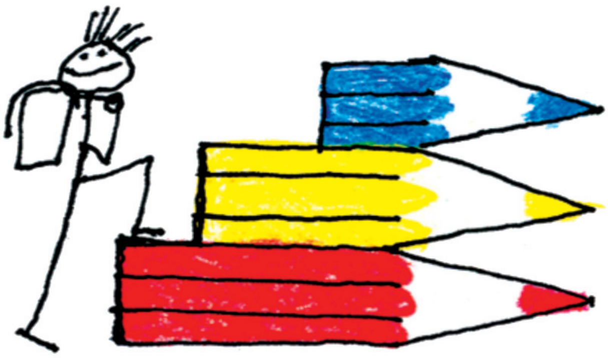
Handreichungen des Programms *SINUS an Grundschulen*

Umgang mit Heterogenität

Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule

Günter Krauthausen
Petra Scherer



SINUS an Grundschulen

Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

Mathe

Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Impressum

Günter Krauthausen, Petra Scherer
Umgang mit Heterogenität. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule

Publikation des Programms *SINUS an Grundschulen*
Programmträger: Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) an der Universität Kiel
Olshausenstraße 62
24098 Kiel
www.sinus-an-grundschulen.de

Projektleitung: Prof. Dr. Olaf Köller
Projektkoordination: Dr. Claudia Fischer
Redaktion u. Realisation dieser Publikation: Brigitte Dedekind, Tanja Achenbach
Kontaktadresse: info@sinus-grundschule.de
ISBN: 978-3-89088-203-1

Nutzungsbedingungen

Günter Krauthausen, Petra Scherer

Umgang mit Heterogenität. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule

1 Einleitung

1.1 Heterogenität als zentrales Thema

Heterogenität und in der Folge die Notwendigkeit von Differenzierung oder Individualisierung des Lernens sind zu einem ›prioritären Thema‹ des Unterrichts geworden – nicht nur in Mathematik und nicht nur in der Grundschule (MSW 2006, S. 4; BSB 2009, S. 6; KMK 2005). Von weitgehend homogenen Lerngruppen auszugehen, ist bereits seit langem eine Illusion in der ›Gesamt-Schule‹ Grundschule. Die Entwicklungsvarianz kann bis zu fünf Jahre betragen (vgl. Lorenz 2000, S. 22). Differenzierung ist also kein neues Postulat, was auch ein Blick in die pädagogische Fachliteratur belegt, wo auf der ersten Ebene zwischen äußerer und innerer Differenzierung unterschieden wird. Wir lassen Erstere im Folgenden außer Acht und konzentrieren uns auf Formen innerer Differenzierung.

Freudenthal wies bereits Mitte der 1970er Jahre einen Weg, der in der Breite auch heute noch kaum wirklich realisiert wird: Versteht man die Heterogenität der Lerngruppen nicht als eine *»Not«*, sondern akzeptiert sie als *Normalität*, dann lässt sich Vielfalt und Verschiedenheit nicht als Hindernis, sondern als *Vorteil* für gemeinsames Lernen verstehen und nutzen: *»Man betrachtet das* [die Heterogenität; GKr/PS] *als eine Not, und aus dieser Not will ich eine Tugend machen, jedoch mit dem Unterschied, daß die Schüler nicht neben- sondern miteinander am gleichen Gegenstand auf verschiedenen Stufen tätig sind.«* (Freudenthal 1974, S. 166)

Was es bedeutet, ›am gleichen Gegenstand‹ zu arbeiten, werden wir im Weiteren näher in den Blick nehmen, denn gerade diese zunächst so unauffällig klingende Forderung kann sich als recht voraussetzungsreich und missverständlich für die Planung und Durchführung des Unterrichts erweisen.

Was den konstruktiven und sachgerechten Umgang mit Heterogenität in den letzten Jahren sicher auch erschwert, ist die Beobachtung, dass die Schlagwörter ›Differenzierung‹ und ›Individualisierung‹ derzeit als *Etikett* bildungspolitisch besonders en vogue sind. Sie müssen daher manchmal auch als Allzweckwaffe herhalten, denn sie gehören zu jenen Begriffen, die von so großer Allgemeinheit und damit auch Vagheit sind, dass sie ein Patentrezept zur Lösung schwieriger Probleme suggerieren. Hinzu kommt, dass sich bei vielen Zugängen in der Literatur oder der Unterrichtspraxis ein Spannungsfeld feststellen lässt zwischen theoretischen Konzepten bzw. grundsätzlichen

Überlegungen/Postulaten/Überzeugungen einerseits und ihren jeweils konkreten Umsetzungen andererseits. Auch deshalb hat es Sinn, hier einmal genauer hinzuschauen. Denn es ist und bleibt eine überzeugende Leitvorstellung, für jedes einzelne Kind möglichst günstige Lernbedingungen zu schaffen (vgl. Wielpütz 1998).

1.2 Verschiedene Formen innerer Differenzierung

In der Literatur und in der Praxis der Lehreraus- und -fortbildung findet man diverse Differenzierungsarten[1]: Soziale Differenzierung (z. B. Einzel-, Partner-, Gruppenarbeit), methodische Differenzierung (z. B. Lehrgang, Projektarbeit, …), mediale Differenzierung (z. B. Schulbuch, Arbeitsblätter, Arbeitsmittel, PC), quantitative Differenzierung (gleiche Zeit für unterschiedlichen Inhaltsumfang oder unterschiedliche Zeit für den gleichen Inhaltsumfang), qualitative Differenzierung (unterschiedliche Ziele bzw. Schwierigkeitsstufen), inhaltliche Differenzierung (die Kinder entscheiden selbst über die Auswahl und Reihenfolge der Inhalte; vgl. Peschel 2009). Nun sind diese Möglichkeiten nicht von vornherein problematisch oder unwirksam. Allerdings gibt es Indizien dafür, dass sie (a) nicht immer *intentionsgemäß* realisiert werden und dass sie (b) zwar hilfreich, aber nicht *hinreichend* sein könnten.
Zu a: Schwierigkeiten können sich z. B. aus unterschiedlichen Begriffsverständnissen oder Vorannahmen ergeben. Einige Schlagwörter: Die häufig reklamierten unterschiedlichen *Schwierigkeitsstufen* zur Adaption von Aufgabenstellungen an individuelle Lernbedürfnisse sind subjektiv und variieren mit der Person, mit der Zeit und mit dem Inhalt. Auch kann der Schwierigkeitsgrad von Aufgaben nicht nur daran gemessen werden, welche formal-syntaktischen Schritte zu ihrer Lösung erforderlich sind. All dies relativiert deutlich die Behauptung, dass ein Lernangebot den Lernvorgang nach Schwierigkeitsstufen individualisiere. Auch das Postulat der *Individualisierung* wird sehr unterschiedlich verstanden und umgesetzt – angefangen von durchaus sinnvollen Ausprägungen bis hin zu Formen, die einer Abschaffung des sozialen Lernens gleichkommen, z. B. wenn jedes Kind nur noch für sich an anderen Inhalten arbeitet. Das macht ein *gemeinsames* Argumentieren und Kommunizieren über *gemeinsam* erlebte Inhalte weder sinnvoll noch möglich. Und nicht zuletzt der Begriff der *Offenheit* bzw. des *offenen Unterrichts:* Hier zeigt sich ein breites Spektrum zwischen ›Offenheit vom FACH‹ (Wittmann 1996) und purer Beliebigkeit.
Zu b: Auch wenn die oben genannten Formen innerer Differenzierung *grundsätzlich* ihre Berechtigung haben, so sind neben den gerade skizzierten Gefahren im Hinblick auf eine wünschenswerte Realisierung individueller Förderung vor allem zwei Punkte kritisch zu sehen: 1.) *Alle* oben genannten Arten innerer Differenzierung (bis auf den letzten Punkt der ›inhaltlichen Differenzierung‹) beruhen zumeist auf *Vorgaben,* die von der Lehrperson oder per Medium (Schulbuch, Arbeitsheft, Arbeitsmittel etc.) vorab und extern entschieden werden. 2.) *Alle* vernachlässigen in der Regel ein *unverzichtbares* Moment: das Fach, also den Inhalt und seine Spezifika. Die Diskussion um eine *begrifflich-konzeptionelle* Klärung diverser Formen von Differenzierung ist stark

1 Die Auflistung folgt keiner durchgängigen Systematik, sondern versteht sich als Schlagwortsammlung. Die aufgeführten Möglichkeiten sind nicht immer trennscharf und häufig auch kombiniert denkbar. Mit Ausnahme des letzten Punktes finden sich alle anderen übrigens bereits bei Winkeler (1976) und in der Folge auch, kaum wesentlich weiterentwickelt, in neueren Publikationen.

allgemein- bzw. schulpädagogisch dominiert und stellt organisatorisch-methodische Fragen in den Vordergrund. In der mathematikdidaktischen Literatur finden sich in jüngerer Zeit aber zunehmend Anregungen mit erprobten und gehaltvollen Unterrichtsbeispielen und Lernumgebungen (z. B. Hengartner et al. 2006, Hirt/Wälti 2009), in denen eine wünschenswerte Differenzierung wirksam werden kann – und zwar weil sie gleichsam in der Sache inhärent angelegt ist und bewusst genutzt wird. Mit diesem zentralem Fokus wird damit eine Differenzierungsart beschrieben, die als natürliche Differenzierung bezeichnet wird.

2 Natürliche Differenzierung

2.1 Begriffsbestimmung

Natürliche Differenzierung steht in engem Zusammenhang mit dem Konzept der ›substanziellen Lernumgebungen‹ (s. u.). Beide Begriffe wurden von Wittmann in die Diskussion eingebracht (1995 u. 2001). Sieht man einmal von der ›Kurzdefinition‹ ab (Wittmann/Müller 2004, S. 15), dann gibt es bislang für den Begriff der natürlichen Differenzierung (anders als für die substanziellen Lernumgebungen) im Prinzip keinen umfassenderen, spezifischen Beitrag, der sich aus ausdrücklich mathematikdidaktischer Sicht und fokussiert mit dem Konzept auseinandersetzt.[2] Als hilfreich bei der Identifikation und Auswahl entsprechender Lernangebote lassen sich aber folgende konstituierende Merkmale festhalten (vgl. Wittmann/Müller 2004, S. 15; Krauthausen/Scherer 2007, S. 228 f.):

- Alle Kinder der Klasse erhalten das gleiche Lernangebot. Man benötigt also keine Vielzahl an separaten Materialien oder Arbeitsblättern. Dieses ›gleiche Lernangebot‹ kann sich leicht als missverständlich erweisen: Bei einer klassischen qualitativen Differenzierung in Gestalt vorgegebener Arbeitsblätter (z. B. kategorisiert in leicht – mittel – schwer) üben beispielsweise alle Kinder die Addition im 100er-Raum – die einen an ›leichten‹ Arbeitsblättern, die anderen an ›schwer(er)en‹ (entweder von der Lehrerin zugeteilt oder von den Kindern selbst ausgewählt – nach welchen Kriterien und wie bewusst auch immer …). Es mag der gleiche Inhalt sein, es ist dann aber nicht zwingend auch das gleiche Lernangebot. Das gleiche Lernangebot liegt aber z. B. dann vor, wenn alle Kinder die gleiche übergeordnete Problemfrage bearbeiten, wozu dann meist auch eine einzige Aufgabenstellung und ein einziges Arbeitsblatt für alle genügt. Dann allerdings müssen weitere Bedingungen hinzukommen:
- Das Angebot muss dem Kriterium der (inhaltlichen[3]) *Ganzheitlichkeit* genügen. Das heißt, es darf eine gewisse Komplexität nicht unterschreiten. Komplexität ist nicht zu verwechseln mit Kompliziertheit, im Gegenteil: »Didaktisches Vereinfachen, Elementarisieren und Zurichten stört den Sinn« (Hengartner 1992, S. 15). Von in diesem Sinne komplexen, ganzheitlichen Lernumgebungen profitieren nachweislich keineswegs nur leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler (vgl. Scherer 1999).

2 Dies u. a. war der Anlass für das EU-Forschungsprojekt NaDiMa (Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht), in dem das Konzept der natürlichen Differenzierung begrifflich-theoretisch geschärft und empirisch erprobt wird (vgl. www.nadima.eu; gefördert unter 142453-LLP-1-20089-1-PL-COMENIUS-CMP).

3 Also nicht gemeint im Sinne von ›Kopf, Herz und Hand‹.

- Ganzheitliche Kontexte in diesem Sinne erfordern eine wohlüberlegte *fachliche Rahmung* (günstigenfalls eine substanzielle Lernumgebung im Sinne Wittmanns; s. u.), die nur durch die fachkompetente Lehrkraft erfolgen und nicht an das Grundschulkind delegiert werden kann (seine Freiheitsgrade eröffnen sich erst im nächsten Schritt). Diese wohlüberlegte Rahmung führt dann dazu, dass *naturgemäß* Fragestellungen unterschiedlicher Schwierigkeitsgrade enthalten sind, ohne dass diese aber vorab festgelegt würden (die fachliche Rahmung ist also zu unterscheiden von den oben genannten traditionellen Vorgaben und Festlegungen durch Arbeitshefte, Schulbücher etc.). Das in diesem Spektrum jeweils zu bearbeitende Niveau wird jetzt – anders als die übergreifende Rahmung – nicht mehr von der Lehrerin oder dem Lehrer bestimmt, sondern das *Kind* trifft diese Wahl. Dies dient nicht zuletzt der Förderung einer zunehmend realistischeren Selbsteinschätzung, die erst erlernt werden muss (Was traue ich mir zu? Was nehme ich mir vor?).
- Neben dem Level der Bearbeitung sind den Kindern freigestellt: die Wege, die Hilfsmittel, die Darstellungsweisen und in bestimmten Fällen auch die Problemstellungen selbst. Und auch hier gilt der Grundsatz, wo immer sinnvoll, *metakommunikativ* tätig zu werden. Gewisse Darstellungsformen einschließlich ihrer Vorteile muss man erst kennenlernen, sie lassen sich nicht vom Kind allein ›entdecken‹; nicht jede Darstellungsform ist gleichermaßen oder überall effektiv; an (kontrastierenden) Beispielen kann man die unterschiedlichen Effekte konkret erfahren; und man kann lernen, dass es kein Problem, sondern normal ist, wenn man erst einmal nach einer geeigneten Darstellungsform suchen muss: Hilft vielleicht eine tabellarische Auflistung? Oder sieht man mehr, wenn man eine Situationsskizze anfertigt? Oder ein strukturiertes Diagramm?
- Das Postulat des sozialen Mit- und Voneinanderlernens wird in ebenso natürlicher Weise erfüllt, da es *von der Natur der Sache her* sinnvoll ist, unterschiedliche Zugangsweisen, Bearbeitungen und Lösungen in einen interaktiven Austausch einzubringen, in dessen Verlauf Einsicht und Bedeutung hergestellt, umgearbeitet oder vertieft werden können. »Alle Schülerinnen und Schüler werden mit alternativen Denkweisen, anderen Techniken, unterschiedlichen Auffassungen konfrontiert, unabhängig von ihrem jeweiligen kognitiven Niveau. Bei strikter innerer Differenzierung wird gerade diese Chance der Begegnung eher erschwert. […] Die verschiedenen, individuell auszugestaltenden Lösungsmöglichkeiten wirken also auch im affektiven Bereich. Sie lassen den Schülerinnen und Schülern kognitive Spielräume, die das Identifizieren mit den Anforderungen im Unterricht erleichtern können und damit – vorwiegend durch die direktere Erfahrung von Autonomie – zu Motivation und Interesse beitragen« (Neubrand / Neubrand 1999, S. 155; vgl. auch Freudenthal 1974).

Aufgabe zur Bearbeitung
Überprüfen Sie im (größeren oder kleineren) Kreis Ihres Kollegiums konkrete Differenzierungsmaßnahmen daraufhin, inwieweit sie die geforderten Kriterien für eine natürliche Differenzierung erfüllen.
Sie können dazu vorgefertigte Materialien von Verlagen auswählen (Arbeitshefte, Schulbücher, andere Differenzierungsmaterialien …) oder auch selbst erstellte Materialien oder Organisationsformen aus Ihrem eigenen Unterricht.

Die skizzierten charakteristischen Merkmale einer natürlichen Differenzierung lassen sich besonders gut dann gewährleisten, wenn sie im Rahmen so genannter substanzieller Lernumgebungen realisiert werden (abgekürzt: SLU). Diese wurden von Wittmann (1995, S. 528 oder 2001, S. 2) an verschiedenen Stellen definiert. Sie sind u. a. dadurch gekennzeichnet, dass in ihnen zentrale Ziele, Inhalte (fundamentale Ideen) und Prinzipien des Mathematiklernens repräsentiert sind, dass sie reichhaltige Möglichkeiten für *mathematische* Aktivitäten der Lernenden bieten und dabei didaktisch flexibel an die spezifischen Bedingungen einer (heterogenen) Lerngruppe angepasst werden können (weitere Erläuterungen in Krauthausen/Scherer 2007, S. 196 ff.). Eine SLU ist nicht identisch mit einer Unterrichtsstunde oder einer vorab festgelegten Unterrichtseinheit. Sie kann sich über eine 45-Minuten-Einheit, über mehrere Unterrichtsstunden erstrecken oder über mehrere Tage verteilt werden, in verschiedenen Schuljahren immer wieder aufgegriffen werden – flexibel angepasst an den jeweiligen Inhalt, die Rahmenbedingungen und Lernprozesse der Kinder.

2.2 Anforderungen an die unterrichtliche Umsetzung

Um eine SLU im Unterricht zu realisieren und Möglichkeiten einer natürlichen Differenzierung auszuschöpfen, bedarf es einer Reihe von Voraussetzungen. Diese sind nicht unbedingt neu, sondern entweder seit langem ein Merkmal guten Unterrichts oder durch den aktuellen Erkenntnisstand der Fachdidaktik neu akzentuiert worden. Wir deuten hier aus Platzgründen nur einige an.

2.2.1 Gute Lernumgebungen/Aufgaben

Die Diskussion um ›gute‹ Aufgaben und eine sachgerechte Aufgabenkultur hat in der Mathematikdidaktik seit einigen Jahre Konjunktur (z. B. Hirt/Wälti 2009; Leuders 2008; Ruwisch/Peter-Koop 2003; Walther 2008; Walther o. J.). Zahlreiche überzeugende und nachahmenswerte Beispiele wurden inzwischen publiziert. Diese Entwicklungen waren sicherlich notwendig, aber vergessen werden darf darüber nicht, dass ›gute‹ Aufgaben *nicht selbstwirksam* sind. Selbst wenn gute Aufgaben ausgewählt werden, kann der Unterricht dennoch abseits wünschenswerten Lernens und Lehrens ablaufen – und damit weder das Potenzial der Aufgaben ausschöpfen noch den Lernenden gerecht werden. Es ist also noch etwas anderes erforderlich, was häufig mit dem Begriff der Lernkultur umschrieben wird (vgl. Griffin 2009), in die das (oft unbewusste) Bild von Mathematik(-unterricht) seitens der Lehrkraft wie seitens der Schülerinnen und Schüler eingehen. Außerdem haben die folgenden Aspekte einen nicht zu unterschätzenden Einfluss.

2.2.2 Voraussetzungen seitens der Agierenden im Unterricht

Diese betreffen ein Bündel von Kenntnissen, Fähigkeiten, Einstellungen/Haltungen und Routinen. Sie böten Stoff für eine längere eigenständige Publikation und können daher hier nur ohne weitere Begründungen aufgelistet werden:

- Fachliche Souveränität der Lehrperson
- Diagnostische Kompetenzen der Lehrperson
- Einstellungen, Haltungen und Routinen (diese sind analog auch auf Seiten der Lernenden vorhanden und relevant!)
  - *Fragehaltung und Begründungsbedürfnis* (statt Zufriedengeben mit bloßen Rechenergebnissen)
  - *Lernen heißt auch zumuten – Fördern durch Fordern* (statt Behüte-Strategien und Ausräumen aller Hindernisse im Lernprozess)
  - *Bild von Unterrichtsmethoden* (Frontalunterricht oder Individualphasen sind per se weder gut noch schlecht, sondern in Abhängigkeit von ihren Zielen zu verstehen; vgl. Gudjons 1998 u. 2004)
  - *Einstellung zu traditioneller innerer Differenzierung und natürlicher Differenzierung* (die Kenntnis von Konzepten ist noch nicht gleichbedeutend mit ihrer entsprechenden Umsetzung)
  - *Zuhören* (statt voreiliges ›Helfen‹ und ›Stundenhalten‹ (Rumpf 1996); zu verfertigende Mathematik statt fertige Mathematik)
  - *Frage- und Impulstechniken* (»Wenn du eine weise Antwort verlangst, musst du vernünftig fragen«; Goethe)
  - *Integration von Beiträgen in Plenumsphasen* (Moderation, Fokussierung, Anregen und Aufrechterhaltung von (Meta-)Kommunikation und Meta-Kognition). Bereits 1985 lautete dazu im Lehrplan NRW eine vorrangige Aufgabe der Lehrperson, »eine Kommunikation aufzubauen und zu erhalten, die dem Lernen *aller* Kinder förderlich ist« (KM 1985, S. 26; Hervorh. GKr/PS).
  - *Umgang mit Deutungsdifferenzen* (sich auf alternative Deutungen einlassen und sie ernst nehmen; vgl. Krummheuer 1994)

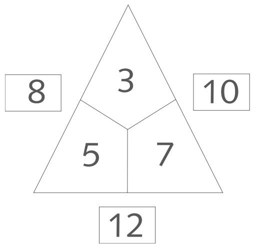
3 Beispiel für eine substanzielle Lernumgebung

Das Schwergewicht der Entwicklung und damit auch der Forschung zu natürlich differenzierenden Lernumgebungen auf Seiten der Fachdidaktik liegt im deutschsprachigen Raum bisher eindeutig auf arithmetischen Übungsformaten und Problemstellungen.[4] Auch für den Unterricht wird das Konzipieren solcher Lernumgebungen dadurch erleichtert, dass hierbei *innermathematische*[5] Muster und Beziehungen thematisiert werden, die *durch die Natur der Sache* zu vielfältigen Übungsaktivitäten und Forschungsfragen anregen. Im Folgenden soll gezeigt werden, wie die arithmetische Lernumgebung Rechendreiecke einen sachgerechten Umgang mit Heterogenität ermöglicht, indem sie ihr Potenzial für eine natürliche Differenzierung nutzt.

4 Die bekanntesten sind Zahlenmauern, Zahlenketten, Rechendreiecke, Mal-Plus-Häuser, Würfelzahlenquadrate usw.

5 Zu den eventuell vermissten Realitätsbezügen sei nur kurz gesagt: Diese haben ihre Berechtigung im Unterricht, sind aber kein Dogma. Im Gegenteil: Innermathematische Fragestellungen sind ihnen bei bestimmten Zielen des Mathematikunterrichts überlegen (vgl. auch das Begriffspaar Anwendungs- und Strukturorientierung; KM 1985). Auch ist inzwischen vielfach belegt, dass innermathematische Fragestellungen keineswegs die Motivation der Kinder beeinträchtigen (und oft sogar unerwartet erhöhen).

3.1 Aufgabenformat Rechendreiecke



Rechendreiecke sind in vielen gängigen Schulbüchern der Grundschule zu finden und damit in der Unterrichtspraxis weitgehend bekannt (vgl. die im Literaturverzeichnis genannten Erfahrungsberichte, in denen sich interessierte Lehrpersonen zusätzlich informieren können). Rechendreiecke stehen als Beispiel für eine bestimmte Teilmenge substanzieller Lernumgebungen, die so genannten ›substanziellen Aufgabenformate‹, deren Grundform (Darstellung, Regel) festgelegt ist. Rechendreiecke bestehen aus einem Dreieck mit je drei Innen- und Außenfeldern (siehe Abbildung oben rechts). In jedem Außenfeld steht die Summe der beiden anliegenden Innenfelder. Das Format kann ab dem 1. Schuljahr in vielfältigen Variationen und mit unterschiedlichen Fragestellungen auf diversen Niveaus bearbeitet werden, ohne dass dieses Niveau vorab festgeschrieben werden muss.

3.2 Spektrum der Aufgabentypen

Aufgabe zur Bearbeitung
Prüfen Sie selbst, bevor Sie weiterlesen, welche verschiedenartigen Aufgabenstellungen zu Rechendreiecken Sie kennen, die über reine Rechenübungen hinausgehen.

Aufgabenformate wie Rechendreiecke erlauben ein breites Spektrum von Aufgabentypen. Als fundamental wichtig hat sich eine solide Einführungs-/Auffrischungsphase herausgestellt, in der die Grundaufgaben eines Formats (hier Rechendreieck) bis zu einer gewissen Geläufigkeit praktiziert werden, damit das Format als solches von den Kindern zuverlässig gehandhabt werden kann. Dazu gehört, dass anstelle zweier Innenfelder auch einmal nur ein Innenfeld und ein zugehöriges Außenfeld gegeben sind (erfordert Subtraktion/Ergänzung). Bestimmte Aufgabentypen oder Problemfragen mögen sich mehr oder weniger für ein bestimmtes Schuljahr anbieten, *grundsätzlich* sind sie aber nicht von vornherein auf eine bestimmte Jahrgangsstufe festgeschrieben, sondern für alle Klassenstufen offen bzw. adaptierbar.

3.2.1 Offene Aufgabenformen

Als empfehlenswert hat sich herausgestellt, mit offeneren Aufgabenformen fortzufahren – entweder völlig frei, oder nach bestimmten Kriterien (vgl. Krauthausen/Scherer 2010). Beispiel: Die Kinder sollen eigene Rechendreiecke generieren, und zwar leichte, schwere und ›besondere‹ (ein und dasselbe Arbeitsblatt mit Leerformaten für *alle*). Dabei ist das Zahlenmaterial freigestellt (kann aber auch eingegrenzt werden: Rechendreiecke über 100, bis maximal 50 o. Ä.). Was die einzelnen Kinder dann als ›besonders‹ verstehen, bietet reichhaltige Gelegenheit zum gemeinsamen Austausch, ebenso wie die Frage, was denn für wen und warum als leicht und schwierig definiert wird (s. o. Metakognition und -kommunikation).
Offenheit kann aber auch in einem übergeordneten Rahmen stattfinden, beispielsweise beim eigenständigen Konstruieren von Mustern, wobei derartige Aufgabenstellungen

in den operativ strukturierten Übungstyp reichen (s. u.) und damit entsprechende Vernetzungen ermöglichen. Nachdem an einigen Beispielen Muster im Sinne einer folgerichtigen Fortführung erkannt und beschrieben wurden (z. B.: im oberen Feld wird die Zahl stets um 1 größer als beim vorherigen Rechendreieck), können die Kinder jeweils Dreiecke konstruieren, indem sie ein selbst gewähltes Muster implementieren, das dann von einem Partner fortzusetzen und auf seine Wirkungen hin zu untersuchen, das heißt, zu begründen[6] ist (z. B. drei weitere Rechendreiecke entsprechend ausfüllen *und* die Regel beschreiben und erklären, also schriftlich dokumentieren; auch dazu reicht ein und dasselbe Arbeitsblatt für alle). Auch die Umkehrung ist sinnvoll: Ein Kind beschreibt ein selbst gewähltes Muster schriftlich, der Partner stellt einige Rechendreiecke dar, die dieses Muster stringent repräsentieren. In allen Fällen haben die Kinder selbst die Möglichkeit, die fachliche Rahmung mit den ihnen zur Zeit verfügbaren Kompetenzen auszufüllen; die Differenzierung erfolgt aus der Sache durch die Kinder. Zwar haben alle mit anderen – mehr oder weniger anspruchsvollen – Mustern und Zahlenwerten gearbeitet, aber die Problemfrage ist für alle gleich, weshalb dann eine anschließende Plenumsphase nicht nur sinnvoll ist, sondern eine ergiebige Gelegenheit zum sozialen Austausch und zur inhaltsbezogenen Reflexion über gemeinsam bearbeitete Inhalte.

3.2.2 Problem- und operativ strukturierte Aufgaben

Wenn die ausgewählte Lernumgebung den Kriterien einer SLU entspricht, sind qua Definition vielfältige Problemfragen naheliegend. Dabei wird nicht zuletzt auch das Spektrum der Übungstypen ausgenutzt (vgl. Wittmann 1992). Problemstrukturierte Fragestellungen lassen sich aus der innermathematischen Struktur der Sache ableiten und den Kindern anbieten. Standardfragen, die ihrerseits eine Niveaudifferenzierung ermöglichen, aber grundsätzlich immer allen Kindern offen stehen, lauten: *Was fällt auf? Kannst du das erklären/warum ist das so? Findest du weitere Beispiele? Findest du alle Beispiele/wie viele kann es geben? Kannst du beweisen, dass es nicht mehr geben kann?*
Konsequentes Modellverhalten der Lehrperson führt übrigens bald dazu, dass Kinder beginnen, sich diese Fragen selbst zu stellen (s. o. Frage- und Begründungsbedürfnis). Das Potenzial für natürliche Differenzierung liegt hier darin, dass die Kinder zum einen unterschiedlich weit bei diesen Fragen vordringen werden. Sie sind aber auch nicht hierarchisch zu verstehen, denn für die *Begründung* eines Musters oder einer Lösungsstrategie können auch sehr anschauliche Darstellungen gewählt werden. Schwache Rechner sind nicht immer auch schwache Problemlöser (vgl. Scherer 1999, S. 294 f.).
Beispiele: Einige vorgegebene Rechendreiecke enthalten ausschließlich Zahlenwerte aus Einmaleinsreihen (vgl. Scherer 2006). Neben der Entdeckung dieser Auffälligkeit als solcher beinhaltet diese Aufgabe Überlegungen zu Teiler- und Vielfacheneigenschaften. Eine andere Zahleigenschaft, die an Rechendreiecken untersucht werden kann, ist gerade/ungerade, und zwar anhand von Fragen zur möglichen Existenz von Rechendreiecken mit (ausschließlich) geraden bzw. ungeraden Außenzahlen – wie immer mit entsprechenden Begründungen (vgl. Abschnitt 4). Thematisiert werden kön-

6 Solche und weitere operativen Variationen können auch z. B. mit Hilfe von Wendeplättchen, die man in das Rechendreieck legt, veranschaulicht werden. Dazu muss das Arbeitsmittel aber in dieser Funktion als Werkzeug den Kindern bekannt und geläufig sein.

nen auch operative Veränderungen, bei denen es Beziehungen zwischen Serien von Rechendreiecken zu erforschen, zu beschreiben und zu begründen gilt (siehe auch oben). Eine weitere ergiebige Problemstellung richtet sich auf die Beziehung der Summe aller Außenzahlen zur Summe aller Innenzahlen. Die hier gemachten Entdeckungen können u. a. hilfreich sein, um bereits auf Grundschulniveau eine Strategie zu entwickeln, bei der man im Zusammenhang mit anderen Fragestellungen zentrale Problemlösestrategien entwickeln kann. Eine solche Aufgabenstellung fällt in die Kategorie der problem-strukturierten Übungen, z. B. wie man ein Rechendreieck löst, bei dem nur die drei Außenzahlen gegeben und alle drei Innenzahlen gesucht sind. Dieses Problem lässt sich nicht mehr durch direktes Ausrechnen lösen, sondern nur über (systematisches) Probieren bzw. durch das Entwickeln entsprechender Problemlösestrategien.

Aufgabe zur Bearbeitung
Versuchen Sie im Kollegenkreis, am Beispiel eines Rechendreiecks mit den Außenzahlen 15, 13, 10 eine allgemeingültige Lösungsstrategie für diesen Aufgabentyp zu finden (und zu begründen).

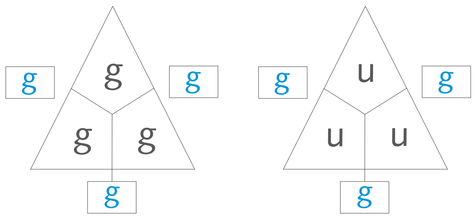
Falls Sie danach die Frage interessiert, wie man dies bereits für Grundschulkinder anschaulich machen kann, dann finden Sie dazu bei Hartmann/Loska (2006) und Loska/Hartmann (2006) entsprechende Erfahrungsberichte.
Überhaupt gilt für alle diese Anregungen: Die Lehrperson muss jeweils vor Ort und in Kenntnis ihrer konkreten Lerngruppe entscheiden, welche Fragestellungen sie aus dem oft umfangreichen grundsätzlichen Pool, den ein Aufgabenformat bietet, aufgreifen möchte. Auch müssen die jeweils relevanten Voraussetzungen bedacht werden, ob und welche Hilfen anzubieten wären (oder auch bewusst noch *nicht).* Diese und weitere Planungsüberlegungen fallen in die Zuständigkeit der Lehrkraft, wenn sie die notwendige fachliche Rahmung professionell vornehmen will, um darin den Kindern Freiräume für mathematische Aktivitäten auf vielfältigen Niveaus zu ermöglichen.

4 Erfahrungen – konkretisiert an einer Problemstellung

4.1 Rechendreiecke mit (un-)geraden Außenzahlen – zur Sache

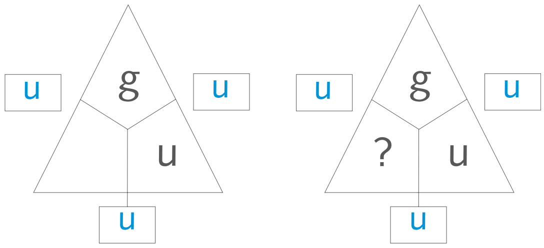
Bei dieser Aufgabenstellung gehen die Kinder der Frage nach, ob es Rechendreiecke mit ausschließlich geraden bzw. ausschließlich ungeraden Außenzahlen geben kann.

Aufgabe zur Bearbeitung
Auf welche Weise können Sie selbst diese Frage untersuchen und Ihr Ergebnis begründen?



Bevor wir auf Phänomene eingehen, die in diesem Zusammenhang im Unterricht entstehen können, ist die Aufklärung des mathematischen Inhalts unabdingbar: Die geforderten Eigenschaften lassen sich durch die Abkürzungen *g* (für gerade) und *u* (für ungerade) in den Außenfeldern notieren. Nun gibt es zwei Möglichkeiten, um in den Außenfeldern ausschließlich gerade Werte zu generieren: *Alle* Innenfelder sind gera-

de (Abb. links), oder *alle* Innenfelder sind ungerade (Abb. rechts).
Verlangen wir hingegen drei *ungerade* Außenfelder, dann haben wir folgendes Problem: Eine ungerade Zahl ist immer die Summe aus einer geraden und einer ungeraden Zahl. Dies können wir in den beiden ersten Innenfeldern herstellen (Abb. links), nicht aber für das 3. Innenfeld (Abb. rechts). Was auch immer wir einsetzen (*g* oder *u*), wir erreichen zwar *eine* weitere ungerade Außenzahl, aber eben nur noch eine; die dritte Außenzahl wird zwangsläufig gerade. Damit haben wir den fachlichen Hintergrund aufgeklärt und – zwar an einem Beispiel aber gleichwohl allgemeingültig – gezeigt, dass es kein Rechendreieck mit drei ungeraden Außenzahlen geben kann, sofern die natürlichen Zahlen vorausgesetzt sind. Dies setzen wir zwar in der Grundschule normalerweise voraus, wird aber nicht von allen Kindern immer so verstanden (s. u.). Derartige ›Sachanalysen‹ sind (für die Lehrperson) auf verschiedenen Niveaus möglich, z. B. auch auf algebraischem, das meist sehr effektiv und ökonomisch ist.

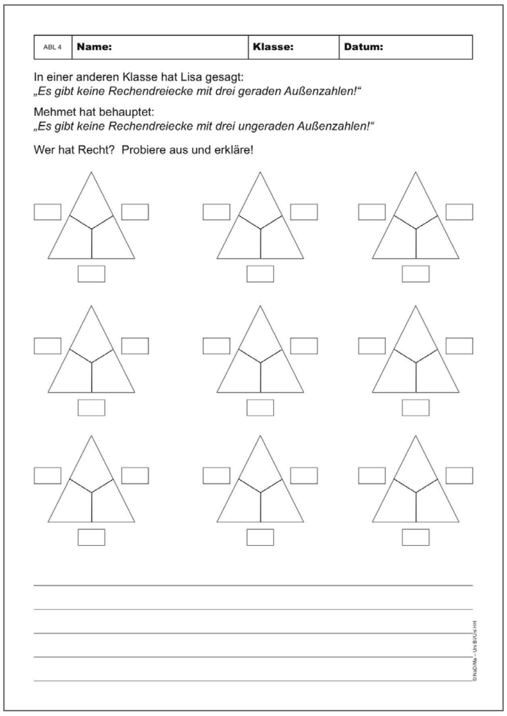


4.2 Rechendreiecke mit (un-)geraden Außenzahlen – der Unterricht

4.2.1 Eine Problemstellung – vielfältige Bearbeitungsmöglichkeiten

Der gewählte Problemkontext kann unterrichtlich in verschiedener Weise umgesetzt werden, z. B. als offener Forscherauftrag, gerade/ungerade Zahlen in Rechendreiecken zu untersuchen, oder, wie im auf der nächsten Seite abgebildeten Arbeitsblatt: Es enthält eine Fragestellung in Form zweier Behauptungen anderer (›virtueller‹) Kinder. Für diese Praxis sprechen mehrere Argumente: Zum einen können die beiden ›simulierten‹ Kinder jedwede Behauptung aufstellen, ohne dass die Klasse von vorne herein – aus Erfahrung mit diesem Unterricht, dieser Lehrerin oder einem bekannten Kind – Vermutungen oder Ahnungen über die Sachrichtigkeit aufstellen konnte. Hier wurde darauf geachtet, dass es sich einmal um eine wahre und einmal um eine falsche Behauptung handelte, sowie um eine lösbare und eine unlösbare Problemstellung. Damit sind nicht nur unterschiedliche Schwierigkeitsgrade verbunden, sondern die Sache fördert und erfordert auch das mündliche oder schriftliche Argumentationsverhalten (vgl. die prozessbezogenen, allgemeinen mathematischen Kompetenzen; KMK 2005).[7] Es werden auch unterschiedliche Methoden der Herangehensweise erforderlich, die nicht zuletzt typische Arbeitsweisen des Mathematik-Treibens ausmachen und ebenfalls (sachbedingt!) ein hohes Differenzierungspotenzial in sich tragen: In allen Fällen ist die grundschulgemäße und naheliegende Vorgehensweise das Ausprobieren anhand von konkreten Zahlenbeispielen – dies gelingt jedem Kind, auch dem leistungsschwächsten, denn ggf. kann hier mit ganz kleinen Zahlenwerten operiert oder Wendeplättchen können als Repräsentanten gelegt werden. Aber selbst dann würde dies zu substanziellen Beiträgen für eine abschließende Plenumsrunde führen können.

7 Vgl. hierzu auch die Handreichungen des Programms *SINUS an Grundschulen:* Bezold (2010) und Krummheuer (2010).


ABL 4	**Name:**	**Klasse:**	**Datum:**

In einer anderen Klasse hat Lisa gesagt:
„Es gibt keine Rechendreiecke mit drei geraden Außenzahlen!"

Mehmet hat behauptet:
„Es gibt keine Rechendreiecke mit drei ungeraden Außenzahlen!"

Wer hat Recht? Probiere aus und erkläre!

Alle Kinder erhalten das abgebildete Arbeitsblatt mit derselben Fragestellung. Es bleibt ihnen selbst überlassen, mit welchem Zahlenmaterial sie in den Leerformaten experimentieren wollen. Dazu gibt es bewusst keine Vorgaben. Man kann dabei auch entdecken (und sich dann darüber austauschen), dass es schlau sein dürfte, hier mit kleineren Zahlen zu arbeiten. Denn obwohl man größere Zahlen bereits beherrscht, kann man den Rechenaufwand möglichst gering halten – weil es vorrangig auf anderes, nämlich das Durchschauen und Erklären eines Musters ankommt. Zu der konkreten Aufgabe: Im Falle von Lisas Behauptung reicht ein einziges Gegenbeispiel, um zu beweisen, dass ihre Behauptung falsch ist *(Falsifizierung).* Im Falle von Mehmets Behauptung, bei der es um den Beleg einer *Unlösbarkeit* geht, reicht es hingegen nicht, selbst mehrere bestätigende Beispiele zu notieren – man könnte ja bei der Auswahl der Beispiele auch nur Glück gehabt haben. Für manche Kinder kann dies aber erst einmal eine hinreichende Datenbasis darstellen, um eine Wertung abzugeben (»Wir haben *ganz oft* probiert.«). Aus genannten Gründen ist aber im Unterricht mehr anzustreben. Dazu können z. B. Fallunterscheidungen hilfreich sein. In jedem Fall geht es um eine allgemeingültige, von Einzelbeispielen losgelöste Begründungsebene. Allgemeingültigkeit ist zum einen natürlich auf algebraischem Weg zu erzielen, allerdings in formaler Form noch nicht in Reichweite der Grundschulkinder. Gleichwohl ist ›algebraisches Denken‹ als solches nicht nur Grundschulkindern möglich, sondern es wird gar seit langem explizit als Aufgabe des Unterrichts gefordert (vgl. Winter 1982). Und so gibt es auch prä-algebraische Zugangsweisen, z. B. über Veranschaulichungen, die zwar einerseits an einem Beispiel durchgeführt werden, gleichzeitig aber den Anspruch und den Nachweis der Allgemeingültigkeit in sich tragen bzw. transparent und plausibel machen können (vgl. Punktmuster- oder Plättchenbeweise, Krauthausen 2001; speziell zu Rechendreiecken vgl. Hartmann/Loska 2006, Scherer 1997). Auch die oben gewählte Darstellung mit *g* für gerade und *u* für ungerade ist ohne Weiteres in der Grundschule einsetzbar.[8]

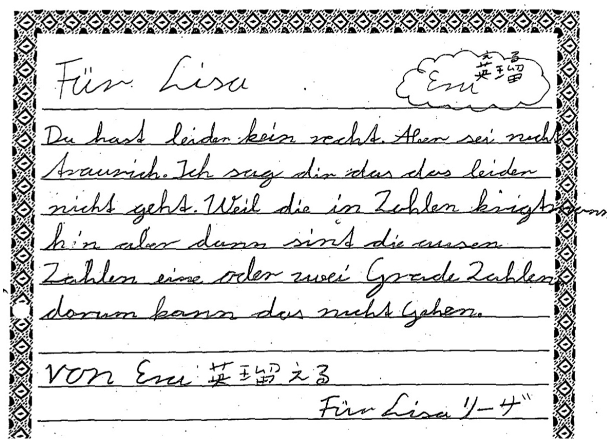
4.2.2 Mündliche und schriftliche Erläuterungen der Kinder

Mit den oben genannten Behauptungen von ›virtuellen‹ Kindern können folgende Vorteile verbunden sein: Es wird immer Schülerinnen und Schüler geben, die dadurch eine hohe Schreibmotivation in den Mathematikunterricht einbringen können. Auch kann

8 Dass die Zusammenhänge $u + u = g$; $g + g = g$ und $u + g = u$ gelten, sollte natürlich vorher verstanden sein, sie lassen sich aber bereits im 1. Schuljahr sehr anschaulich begründen.

die persönliche Ansprache durch andere, gleichwohl unbekannte Kinder motivationsfördernd sein, um sich ausführlicher, oder auch überhaupt schriftlich zu äußern. Manche Kinder verfassen ihre Texte im (von der Lehrkraft initiierten) Brief-Stil und sprechen Lisa und Mehmet ganz direkt an:

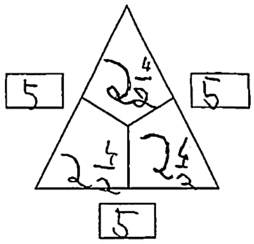
> Klara (2. Kl.): *»Für Lisa! Liebe Lisa deine vermutung ist falsch weil man ungerade Zahlen nicht in normalen[9] Zahlen teilen kann.«*
>
> Franka (2. Kl.): *»Liebe Lisa es geht auch mit Ungeraden Zalen. Lisa wen man grade in Zalen nimmt sind die ergebnisse auch grade wenn man beides nimt sind von beiden. Ein Schönen grus von Franka.«*
>
> Carlotta (2. Kl.): *»Für Mehmet. Liebe Mehmet das was du gesagt hast fand ich richtig, weil ich es aus probiert habe und es ging nicht. Also gebe ich dir recht, und es hat sehr viel spaß gemacht es zu machen.«*
>
> Lilly (2. Kl.): *»Lieber mehmet ich habe etwas mer rumgeknobilt aber ich binn auf das inscheidene gekommen und das ergebnis war das du recht hattest.«*
> (Ein beiliegendes Rechendreieck enthielt die Innenzahlen 7, 7, 17.)


Für Lisa
Emi 英瑠
Du hast leider kein recht. Aber sei nicht trauring. Ich sag dir das das leider nicht geht. Weil die in Zahlen kriegt man hin aber dann sind die aussen Zahlen eine oder zwei Grade Zahlen darum kann das nicht Gehen.
von Emi 英瑠える
Für Lisa リーザ

Im Mathematikunterricht ist das Verfassen von Texten (mathematische Aufsätze) vielfach noch ungewohnt, gleichzeitig aber auch eine lohnende Brücke zu Zielen und Aufgaben des Sprachunterrichts.[10] Bereits ab Klasse 1 kann man Kinder dazu anregen, sich schriftlich zu äußern (auch mit Unterstützung durch Skizzen oder Beispielaufgaben). Natürlich werden manche Texte zunächst entsprechend kurz sein; bringt man diese Praxis aber *gewohnheitsmäßig* in die Lernkultur der Klasse ein, so wird man recht schnell feststellen, dass sie länger und gehaltvoller werden (bis zu einer ¾ Seite DIN A4 in der 2. Kl.), indem z. B. über die reine Aussage zur Sachrichtigkeit hinaus auch Erklärungen und Beispiele geliefert werden. Natürlich dokumentieren sich auch hier Leistungsunterschiede. Wichtig aber ist: Alle Kinder können sich zum selben Sachverhalt äußern – angefangen von Einwortsätzen bis hin zu längeren mathematischen Aufsätzen. Sich darüber im Plenum dann auszutauschen, führt aber dazu, dass auch die leistungsschwächeren Kinder Vorbilder erfahren, von denen sie lernen können. Die Unterschiede zwischen den Texten etwa einer 2. und 4. Klasse waren in Erprobungen übrigens nicht so groß, wie man meinen könnte.

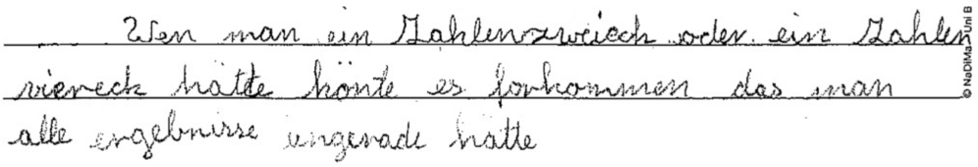
9 Das heißt, man erhält keine natürlichen (»normalen«) Zahlen als Ergebnis.
10 Eine hervorragende Gelegenheit für Lernzielimporte und -exporte mit dem Aufsatzunterricht.

4.2.3 Weitere Explorationen der Kinder



Ein in mehrfacher Hinsicht gutes Zeichen ist es, wenn Kinder über den Tellerrand der Aufgabe hinaus schauen: Zu belegen, warum eine Aussage zutrifft oder nicht, ist gewiss schon eine bemerkenswerte Leistung. Dann aber *unaufgefordert* weiter zu überlegen und nach veränderten Bedingungen zu suchen, unter denen etwas offenbar Unlösbares doch noch lösbar *gemacht* werden kann, ist eine sehr mathematische Denkweise, die ausdrücklich wertzuschätzen ist (vgl. Scherer 2007). Es zeugt von der Flexibilität eines Denkens, das nach Alternativen Ausschau hält und Situationen nicht nur abarbeitet, sondern aktiv *gestaltet.* Zugleich zeigt sich damit weiteres ›Differenzierungspotenzial nach oben‹. Davide (2. Klasse) etwa konnte Mehmets Behauptung dadurch doch noch widerlegen, dass er die Rechendreiecke auf rationale Zahlen ausweitete und in jedes Innenfeld $2\,{}^4/{}_2$ setzte (aber als $2\,{}^2/{}_4$ gesprochen), was zu den ungeraden Außenzahlen 5 führte. Er kam also bei *seiner* Deutung der Problemstellung, die ja die natürlichen Zahlen nicht ausdrücklich festschrieb, zu Recht zu einem anderen, wenn auch unerwarteten Ergebnis.
Für manche Kinder kann so etwas zu Irritationen führen, wenn für sie Mathematik bedeutet, dass am Ende immer *ein* Ergebnis herauskommen müsse. Dass eine Aufgabe aber, je nach Sichtweise, auch einmal mehr als eine Lösung haben kann und dass es in der Mathematik recht häufig den Fall gibt, dass man bestimmte Rahmenbedingungen vorab definiert und damit gezielt Ausschnitte festlegt – all dies ist hier bereits im Unterricht der Grundschule zu erfahren. Auch solche Diskussionen sind es wert, bewusst geführt zu werden, weil auch sie zu einem realistischen Bild des Fachs beitragen.

Eine weitere Umgestaltung: Lara (4. Kl.) dachte über eine grundsätzliche Änderung des Aufgaben-Layouts nach:



Aufgabe zur Bearbeitung
Gehen Sie dieser Idee für ein Zahlenviereck[11] einmal nach: Wie sähe es aus? Wie würden die Regeln lauten? Welche Fragestellungen böten sich zur Untersuchung an? Welche Muster zeigen sich und warum? Finden Sie noch weitere Vielecke, bei denen es klappt?
Danach können Sie Ihre Erfahrungen vergleichen mit jenen von Hartmann/Loska (2006).

Ein anderes Kind erörterte die Lösbarkeit durch die Veränderung der Operation, wenn z. B. das Rechendreieck mit der Multiplikation statt der Addition berechnet würde. Auch die damit verbundenen Implikationen können Sie selbst einmal untersuchen …

11 Bei Floer/Möller (1985, S. 89) findet sich diese Idee als ›Vierfeldertafel‹. Sie weisen darauf hin, dass die Grundidee und insbesondere der mathematische Hintergrund bereits bei McIntosh/Quadling (1975) und Walther (1978, hier übrigens auch schon auf Grundschulniveau mittels qualitativer Lösungszugänge) ausführlicher beschrieben wurden.

Die exemplarisch angedeuteten kreativen Ausweitungen oder Umgestaltungen können die Kinder nur dann vornehmen, wenn sie die Gründe für das Funktionieren oder Nichtfunktionieren einer Struktur erkannt und durchschaut haben. Dieses Verstehen ist dabei so stabil und substanziell, dass es gleichzeitig eine gewisse Distanzierung von den reinen Phänomenen erlaubt. Dieses ›Über-der-Sache-stehen‹ stellt bereits eine sehr weitreichende Form des Verstehens dar. Es erhöht die Wahrscheinlichkeit, dass in solchen Lernprozessen günstige Bedingungen für Transfers und Vernetzungen entstehen und genutzt werden können. Bei den von den Schülerinnen und Schülern hier von sich aus spontan vorgenommenen Erweiterungen (ausgelöst durch die Unlösbarkeit eines Problems) handelt es sich um die von Schupp (1999) beschriebene »Aufgabenvariation«, dort als expliziter Auftrag an die Schüler gestellt, um allgemeine Strategien zu entwickeln und zu einem tieferen mathematischen Verständnis beizutragen. Auch dort wird die Wichtigkeit einer reflektierenden Phase betont, in der alle Schülervorschläge diskutiert und analysiert werden (ebd., S. 23).
Die exemplarisch angedeuteten kreativen Lösungen der Kinder weisen auf eine Unterrichtskultur hin, in der eine offenere Atmosphäre herrscht, in der Kinder auch etwas ›wagen‹ dürfen, in der Fehler gemacht werden dürfen und in denen kreatives Denken (mit all seinen Unwägbarkeiten) als Bereicherung des gemeinsamen Lernens wertgeschätzt wird.

5 Fazit

Die Beispiele zur Lernumgebung Rechendreiecke wie auch jene zu anderen arithmetischen Aufgabenformaten können zeigen, dass hier besondere *Potenziale für eine natürliche Differenzierung* liegen, die wiederum effektive Möglichkeiten für einen konstruktiven Umgang mit Heterogenität beim Mathematiklernen bereitstellen. Insbesondere lassen sich folgende Aspekte bestätigen:

- niedrige Zugangsschwelle der Aufgabenformate und damit ein schnelles und tragfähiges Verständnis der Formate (Aufbau, Regel) durch *alle* Kinder,
- weitgehend durchgängige und länger als üblich anhaltende Motivation der meisten Kinder,
- höherer Substanzgehalt des Unterrichts, u. a. wegen der gemeinsamen Plenumsphasen, in denen *alle* über *ein und denselben* Gegenstand nachdenken und sich austauschen können,
- leistungsschwache Kinder haben größere Chancen, zum mathematischen Kern vorzudringen, vor allem weil die reinen Rechenanforderungen niedrig gehalten werden können und die Plenumsphasen das Von- und Miteinanderlernen befördern,
- leistungsstärkere Kinder unterschätzen manchmal den Gehalt der Forschungsaufträge – vielleicht aufgrund bisheriger Erfahrungen mit Mathematikunterricht, in dem das Finden des einen oder eines richtigen Ergebnisses im Vordergrund steht – und neigen dann zu vorschnellen Lösungshypothesen oder unvollständigen Bearbeitungen.

Diese Effekte zeigen sich nicht immer und bei jedem einzelnen Kind einer jeden Klasse. Auch das Konzept der natürlichen Differenzierung im Rahmen substanzieller Lernumgebungen ist kein Garant, mit dem sich – erst recht nicht voraussetzungslos und allumfassend – Erfolge determinieren ließen. Dies aber vermag *kein* didaktisches Konzept.

Die Erfahrungen zeigen jedoch klar, dass sich mit diesem Konzept die *Wahrscheinlichkeit* für wünschenswertes gemeinsames Lernen *aller* Kinder in heterogenen Lerngruppen deutlich erhöhen lässt – insbesondere, wenn man es in Beziehung setzt zu traditionellen Differenzierungsformen und ihrem Aufwand und tatsächlichen Effekten. Lehrpersonen können niemals Lernprozesse erzwingen, sie können Kinder nicht zwangsläufig zum Lernen bringen. Das Bemühen kann allenfalls dahin gehen, geeignete Möglichkeiten und Rahmenbedingungen dafür zu schaffen. In didaktischer und pädagogischer Verantwortung Wahrscheinlichkeiten zu erhöhen, ist aber schon deutlich mehr, als Kinder der Beliebigkeit zu überlassen in der Hoffnung, dass sich Lernprozesse ereignen mögen.
Auch was die notwendigen Rahmenbedingungen dazu betrifft, haben Erprobungen wichtige Hinweise ergeben. Natürliche Differenzierung wird sich demnach um so eher realisieren lassen, je konsequenter und umfassender die folgenden Rahmenbedingungen gewährleistet sind:

- Die Lehrkraft steht souverän in der Sache, hat den *mathematischen* Kern vorab vertieft durchdrungen und für sich aufgeklärt.
- Die Lehrkraft hat die entsprechende diagnostische Kompetenz, um auch ungewöhnliche Denkwege der Kinder zu verstehen und sachgerecht in den Unterricht zu integrieren.
- Die Lehrkraft beherrscht eine Frage- und Impulstechnik, die es gewährleistet, dass sachbezogene Lern- und Kommunikationsprozesse im Unterricht initiiert und aufrechterhalten werden.
- Die Unterrichtskultur ist geprägt durch hohe Akzeptanz der individuellen Lernwege, den Kindern wird etwas zugetraut und zugemutet, es herrscht ein produktiver Umgang mit Fehlern im Lernprozess und ein offener Kommunikations- und Interaktionsstil.
- Transparenz der Anforderungen, ein sachgerechter Umgang mit Deutungsdifferenzen sowie eine gewohnheitsmäßig realisierte Meta-Kommunikation zeichnen das gemeinsame Lernen aus.
- Natürliche Differenzierung und das Arbeiten in substanziellen Lernumgebungen ist kein ›Extrastoff‹, sondern kennzeichnet den Unterrichts*alltag,* es dient nicht als bloßes Intermezzo im Sinne einer Feiertagsdidaktik.

Literaturverzeichnis allgemein

Bezold, A. (2010): *Mathematisches Argumentieren in der Grundschule fördern.* Handreichung des Programms *SINUS an Grundschulen.* Kiel: IPN-Materialien. http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Mathe_Bezold.pdf

BSB, Freie und Hansestadt Hamburg, Behörde für Schule und Berufsbildung (Hrsg.) (2009): *Hamburger Bildungsoffensive. Rahmenkonzepte für Primarschule, Stadtteilschule und das sechsstufige Gymnasium.* Hamburg: BSB.

Floer, J., Möller, M. (1985): *Der Zahlenraum bis 100 und die Entdeckung des Stellenwertsystems.* In: J. Floer (Hrsg.): Arithmetik für Kinder. Materialien – Spiele – Übungsformen, S. 68–100. Frankfurt / M.: Arbeitskreis Grundschule.

Freudenthal, H. (1974): *Die Stufen im Lernprozeß und die heterogene Lerngruppe im Hinblick auf die Middenschool.* Neue Sammlung, Heft 14, S. 161–172.

Griffin, P. (2009): *What makes a rich task?* Mathematics Teaching, Heft 212, S. 32–34.

Gudjons, H. (1998): *Frontalunterricht – gut gemacht … Come-back des »Beybringens«?* Pädagogik, Heft 5, S. 6–8.

Gudjons, H. (2004): *Frontalunterricht im Wandel. Auf dem Weg zur Integration in offene Unterrichtsformen.* Pädagogik, Heft 1, S. 23–26.

Hartmann, M., Loska, R. (2006): *Rechenfiguren erkunden.* In: E. Rathgeb-Schnierer, U. Roos (Hrsg.): Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht, S. 101–112. München: Oldenbourg.

Hengartner, E. (1992): *Für ein Recht der Kinder auf eigenes Denken.* Die neue Schulpraxis, Heft 7/8, S. 15–27.

Hengartner, E. et al. (2006): *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht.* Zug: Klett & Balmer.

Hirt, U., Wälti, B. (2009): *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte.* Seelze: Kallmeyer.

KM, Der Kultusminister des Landes Nordrhein-Westfalen (1985): *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen – Mathematik.* Köln: Greven.

KMK, Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2005): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich Beschluss vom 15.10.2004.* München: Wolters Kluwer.

Krauthausen, G. (2001): *»Wann fängt das Beweisen an? Jedenfalls, ehe es einen Namen hat.«* In: W. Weiser., B. Wollring (Hrsg.): Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe, S. 99–113. Hamburg: Verlag Dr. Kovač.

Krauthausen, G., Scherer, P. (2007): *Einführung in die Mathematikdidaktik.* 3. Aufl. Heidelberg: Spektrum.

Krauthausen, G., Scherer, P. (2010): Natürliche Differenzierung durch offene Aufgaben im Rahmen substanzieller Lernumgebungen. Grundschulunterricht, Heft 7 (im Druck).

Krummheuer, G. (1994): *Der mathematische Anfangsunterricht: Anregungen für ein neues Verstehen früher mathematischer Lehr-Lern-Prozesse.* Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Krummheuer, G. (2010): *Wie begründen Kinder im Mathematikunterricht der Grundschule? Ein Analyseverfahren zur Rekonstruktion von Argumentationsprozessen.*

Handreichung des Programms *SINUS an Grundschulen.* Kiel: IPN-Materialien. http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Mathe_Krummheuer.pdf

Leuders, T. (2008): *Aufgaben erleben statt erledigen. (Sich) Mathematikaufgaben stellen.* Pädagogik, Heft 3, S. 20–25.

Lorenz, J. H. (2000): *Aus Fehlern wird man … Irrtümer in der Mathematikdidaktik des 20. Jahrhunderts.* Grundschule, Heft 1, S. 19–22.

Loska, R., Hartmann, M. (2006): *Erste Schritte in die Algebra mit dem Rechendreieck. Grundschule,* Heft 1, S. 36–38.

McIntosh, A., Quadling, D. (1975): *Arithmogons.* Mathematics Teaching, Heft 70, S. 18–23.

MSW, Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2006): *Jedes Kind mitnehmen! Das neue Schulgesetz in Nordrhein-Westfalen.* Düsseldorf: Ritterbach.

Peschel, F. (2009): *Offener Unterricht: Idee, Realität, Perspektive und ein praxiserprobtes Konzept zur Diskussion.* Bd. 1: Allgemeindidaktische Überlegungen; Bd. 2: Fachdidaktische Überlegungen. Hohengehren: Schneider.

Neubrand, J., Neubrand, M. (1999): *Effekte multipler Lösungsmöglichkeiten: Beispiele aus einer japanischen Mathematikstunde.* In: C. Selter, G. Walther (Hrsg.): Mathematikdidaktik als design science, S. 148–158. Leipzig: Klett Grundschulverlag.

Rumpf, H. (1996): *Abschied vom Stundenhalten.* In: A. Combe, W. Helsper (Hrsg.): Pädagogische Professionalität. Untersuchungen zum Typus pädagogischen Handelns, S. 472–500. Frankfurt / M.: Suhrkamp.

Ruwisch, S., Peter-Koop, A. (Hrsg) (2003): *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule.* Offenburg: Mildenberger.

Scherer, P. (1997): *Substantielle Aufgabenformate – jahrgangsübergreifende Beispiele für den Mathematikunterricht, Teil III.* Grundschulunterricht, Heft 6, S. 54–56.

Scherer, P. (1999): *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte: Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung.* 2. Auflage. Heidelberg: Edition Schindele.

Scherer, P. (2006): *Rechendreiecke – Vertiefende Übungen zum Einmaleins.* Grundschule, Heft 1, S. 40–43.

Scherer, P. (2007): *»Unschaffbar«. Unlösbare Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule.* Grundschulunterricht, Heft 2, S. 20–23.

Schupp, H. (1999): *Aufgabenvariationen als Unterrichtsgegenstand.* In: H.-W. Henn (Hrsg.): Mathematikunterricht im Aufbruch, S. 20–23. Hannover: Schroedel.

Walther, G. (1978): *Arithmogons – eine Anregung für den Rechenunterricht in der Primarstufe.* Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, Heft 6, S. 325–328.

Walther, G. et al. (Hrsg.) (2008): *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Walther, G. (o. J.): *Umgang mit Aufgaben im Mathematikunterricht. Mathematikmodul G1, SINUS an Grundschulen.* www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_STG/Mathe-Module/M1.pdf.

Wielpütz, H. (1998): *Das besondere Kind im Mathematikunterricht – Anmerkungen aus der Sicht einer reflektierten Praxis, Beobachtung und Beratung.* In: A. Peter-Koop

(Hrsg): Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule, S. 41–58. Offenburg: Mildenberger.

Winkeler, R. (1976): *Differenzierung: Funktionen, Formen und Probleme.* Ravensburg: Maier.

Winter, H. (1982): *Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe.* mathematica didactica, Heft 4, S. 185–211.

Wittmann, E. Ch. (1992): Üben im Lernprozeß. In: E. Ch. Wittmann, G. N. Müller (Hrsg.): *Handbuch produktiver Rechenübungen.* Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen, S. 175–182. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. Ch. (1995): *Unterrichtsdesign und empirische Forschung.* In: K. P. Müller (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 528–531. Hildesheim: Franzbecker.

Wittmann, E. Ch. (1996): *Offener Mathematikunterricht in der Grundschule – vom FACH aus.* Grundschulunterricht, Heft 6, S. 3–7.

Wittmann, E. Ch. (2001): *Developing Mathematics Education in a Systemic Process.* Educational Studies in Mathematics, Heft 1, S. 1–20.

Wittmann, E. Ch., Müller, G. N. (2004): *Das Zahlenbuch. Mathematik im 4. Schuljahr.* Lehrerband Neubearbeitung. Leipzig: Klett Grundschulverlag.

Literaturverzeichnis zum Aufgabenformat Rechendreiecke

Hartmann, M., Loska, R. (2004): *Übungsformate ausloten – Strukturen erkennen. Das Zauberdreieck erneut betrachtet.* In: G. Krauthausen, P. Scherer (Hrsg.): Mit Kindern auf dem Weg zur Mathematik – Ein Arbeitsbuch zur Lehrerbildung, S. 57–66. Donauwörth: Auer.

Hartmann, M., Loska, R. (2006): Rechenfiguren erkunden. In: E. Rathgeb-Schnierer, U. Roos (Hrsg.): *Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht,* S. 101–112. München: Oldenbourg.

Hartmann, M., Loska, R. (2006): *Erste Schritte in die Algebra mit dem Rechendreieck.* Grundschule, Heft 1, S. 36–38.

Krauthausen, G., Scherer, P. (2010): Natürliche Differenzierung durch offene Aufgaben im Rahmen substanzieller Lernumgebungen. Grundschulunterricht, Heft 7 (im Druck).

Loska, R., Hartmann, M. (2006): *Erste Schritte in die Algebra mit dem Rechendreieck. Grundschule,* Heft 1, S. 36–38.

McIntosh, A., Quadling, D. (1975): *Arithmogons.* Mathematics Teaching, Heft 70, S. 18–23.

Scherer, P. (1997): *Substantielle Aufgabenformate – jahrgangsübergreifende Beispiele für den Mathematikunterricht, Teil III.* Grundschulunterricht, Heft 6, S. 54–56.

Scherer, P. (2003): *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Fördern durch Fordern.* Band 2: Addition und Subtraktion im Hunderterraum. Hamburg: Persen.

Scherer, P. (2005). *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Fördern durch Fordern.* Band 1: Zwanzigerraum. Hamburg: Persen.

Scherer, P. (2006): *Rechendreiecke – Vertiefende Übungen zum Einmaleins.* Grundschule, Heft 1, S. 40–43.

Scherer, P. (2007): *»Unschaffbar«. Unlösbare Aufgaben im Mathematikunterricht der*

Grundschule. Grundschulunterricht, Heft 2, S. 20–23.

Selter, C. (1997): *Entdecken und Üben mit Rechendreiecken. Eine substantielle Übungsform für den Mathematikunterricht.* Friedrich Jahresheft: Lernmethoden, Lehrmethoden. Wege zur Selbständigkeit, Heft XV, S. 88–90.

Walther, G. (1978): *Arithmogons – eine Anregung für den Rechenunterricht in der Primarstufe.* Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, Heft 6, S. 325–328.

Wittmann, E. Ch. (1994): *Legen und Überlegen. Wendeplättchen im aktiv-entdeckenden Rechenunterricht.* Die Grundschulzeitschrift, Heft 72, S. 44–46.

Wittmann, E. Ch. (1995): *Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Rechenunterricht – vom Kind und vom Fach aus.* In: G. N. Müller, E. Ch. Wittmann (Hrsg.): Mit Kindern rechnen, S. 10–41. Frankfurt / M.: Arbeitskreis Grundschule.

Wittmann, E. Ch. (1998): *Mathematics Education as a ›design science‹.* In: A. Sierpinska, J. Kilpatrick (Hrsg.): Mathematics Education as a Research Domain. A Search for Identity. An ICMI Study, S. 87–103. Dordrecht: Kluwer.

Programmträger: IPN, Kiel
Projektleitung: Prof. Dr. Olaf Köller
www.ipn.uni-kiel.de

SINUS an Grundschulen
Projektkoordination am IPN: Dr. Claudia Fischer
Tel. +49(0)431/880-3136
cfischer@ipn.uni-kiel.de
www.sinus-an-grundschulen.de

Ministerium
für Bildung und Kultur
des Landes Schleswig-Holstein

Programmkoordination für die Länder durch das
Ministerium für Bildung und Kultur
des Landes Schleswig-Holstein (MBK)
Dr. Kai Niemann
www.schleswig-holstein.de/MBK/DE/MBK_node.html

Serverbetreuung: Deutsches Institut für Internationale
Pädagogische Forschung (DIPF)
www.dipf.de

ISBN für diese Handreichung
978-3-89088-203-1