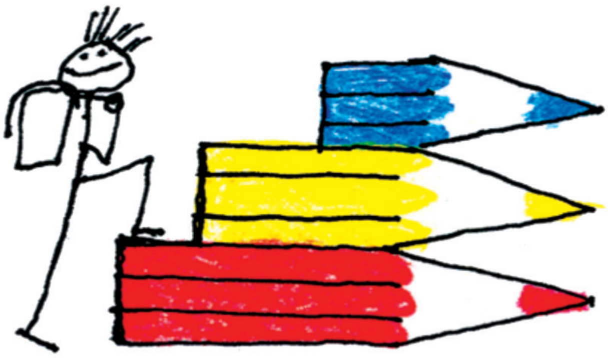
Handreichungen des Programms *SINUS an Grundschulen*

Mathematikunterricht in der Grundschule im Geiste Fröbels

Heinrich Winand Winter



SINUS

an Grundschulen

Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

Mathe

Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Zu den Würfelnetzen 4

2 Parkettieren mit Würfelnetzen 5

3 Vom Würfel zum regulären Tetraeder 6

4 Vom Würfel zum Oktaeder 8

5 Ein echtes Highlight – die Stellaoctangula (Achtstern) des Johannes Kepler 10

6 Noch ein Durchdringungskörper und zwei weitere Körper 11

7 Hängende und stehende Würfel, die Drehsymmetrien des Würfels 13

8 Die Drehsymmetrien des Würfels im Überblick 14

9 Zur Vertiefung: Symmetrie von Teilkörpern des Würfels 15

10 Anmerkungen zu Soma-Würfeln 17

11 Färben von Würfeln 18

12 Die bunten Würfel des englischen Mathematikers und Offiziers MacMahon 19

13 Übungen zum Sehen und Zeichnen 20

14 Vom Billschen Design zur Kristallographie 21

15 Die Würfelhälfte beim rhombischen Schnitt, Beispiele für Körper aus zwei Würfelhälften 22

16 Ein „neuer“ (?) Körper aus 8 rhombischen Würfelhälften 24

Literatur 25

Impressum

Heinrich Winand Winter
Mathematikunterricht in der Grundschule
im Geiste Fröbels

Publikation des Programms *SINUS an Grundschulen*
Programmträger: Leibniz-Institut für die Pädagogik
der Naturwissenschaften
und Mathematik (IPN)
an der Universität Kiel
Olshausenstraße 62
24118 Kiel
www.sinus-an-grundschulen.de

Projektleitung: Prof. Dr. Olaf Köller
Projektkoordination: Dr. Claudia Fischer
Redaktion u. Realisation dieser Publikation:
Brigitte Dedekind, Verena Hane
Kontaktadresse: info@sinus-grundschule.de

ISBN: 978-3-89088-220-8

Nutzungsbedingungen

Heinrich Winand Winter

Mathematikunterricht in der Grundschule im Geiste Fröbels“

Skizzen als Ergänzung zum Impulsreferat vom 01.04.2011 in Bad Münster am Stein

Vorwort zu den „Nachträgen“

Ich bin Frau Dedekind sehr dankbar dafür, dass ich durch diese Nachträge und Ergänzungen mit verkleinerten Folien mein Impulsreferat vom 01.04.2011 in Bad Münster am Stein zum Thema: „Mathematikunterricht in der Grundschule im Geiste Fröbels“ etwas verdeutlichen kann.

Zunächst ein Wort zu Fröbel.
Fröbel ist keineswegs nur der Erfinder des Kindergartens, wiewohl er schon allein deshalb als außerordentlicher Pädagoge gelten muss. Sein vielzitierter Aufruf (von 1838) „Kommt, lasst uns unseren Kindern leben“ gilt nicht nur den Kindergärtnerinnen, ist vielmehr an alle Pädagogen und Eltern gerichtet, speziell auch an alle Mathematiklehrer. Man muss Fröbel als einen hervorragenden Mathematikdidaktiker würdigen.
Allein mit seinen drei „Hauptformen“ und ihren wechselseitigen Abhängigkeiten

I. Lebensformen – vom naiven Wahrnehmen zum Durchschauen
II. Schönheitsformen – von sinnlicher Begegnung zum kreativen Gestalten
III. Erkenntnisformen – vom Ahnen zu begründbaren Einsichten

könnte Fröbel als Leitstern in der heutigen Diskussion über Ziele des Mathematikunterrichts angesehen werden. Fröbel hat seine Ideen weitläufig theoretisch überhöht, jedoch auch stets die Unterrichtspraxis ernst genommen, geniale didaktischen Vorschläge geliefert und selbst gern in verschiedenen Schulanstalten unterrichtet, so auch bei Pestalozzi. Dabei forderte er einen freien und offenen Unterricht; insbesondere müsse der Lehrer stets freudig bereit sein, von Kindern zu lernen.
Seine berühmten Spielgaben sind Baukästen mit elementaren Körpern. Er erkannte die pädagogische Bedeutung des spielerischen und kreativen Umgangs mit Festkörpern und war als Kristallologe befähigt, tiefergehende Fragen mit den Lernenden zu erörtern.

Ein Erfolg dieser „Nachträge“ wäre es, wenn einige – möglichst viele – Lehrkräfte angestoßen würden, geometrische Tätigkeiten der vorgeschlagenen Art selbst zu versuchen und für den eigenen Unterricht zu transformieren.
Es handelt sich nicht darum, Elemente eines neuen Lehrplans zusammen zu tragen, vielmehr ist das Hauptziel, Mathematik als Faszinosum zu erfahren, als lebensbezogene, schöne und Vernunft stärkende Beschäftigung zu erleben.

1 Zu den Würfelnetzen

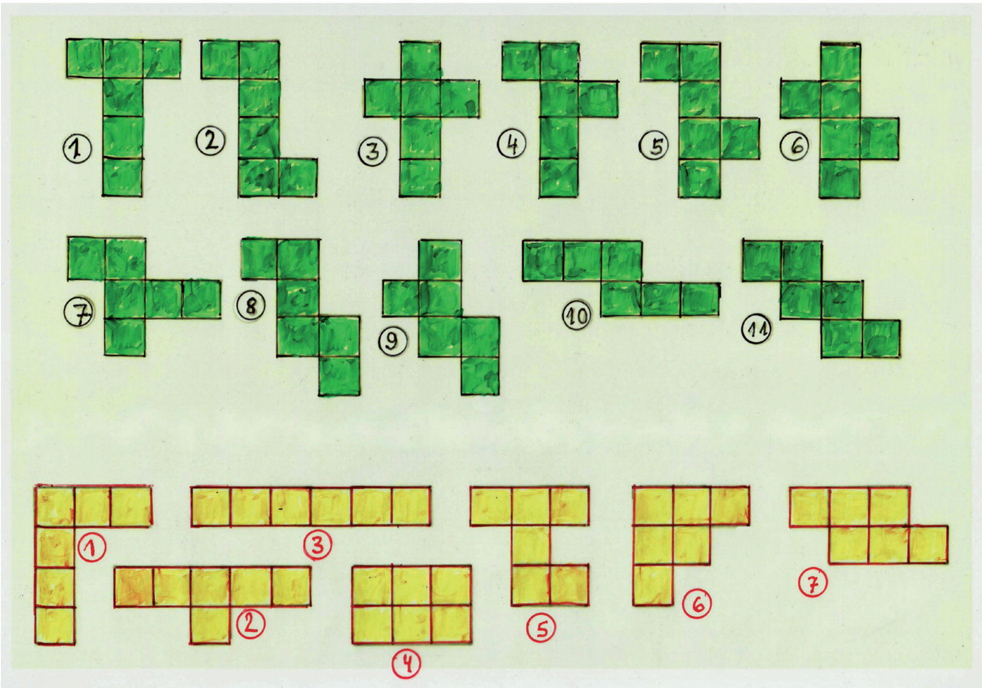


Abb. 1: Würfelnetze

Der Umgang mit Netzen bzw. Abwicklungen ist für die Herstellung von Flächenmodellen unausweichlich. Er ist auch notwendig für das Erkennen von mathematischen Zusammenhängen, z. B.: Wie kann man sicherstellen, dass die Abb. 1 oben (grün) wirklich genau alle möglichen Netze enthält? Dass es überhaupt Würfelnetze sind, kann durch gedankliches oder letztlich immer mögliches reales Bauen demonstriert werden, etwa durch Aufweisen der Flächen (Grundfläche G, Deckfläche D, Rechtsfläche R, Linksfläche L, Vorderfläche F, Hinterfläche H) im Netz. Die Überzeugung, dass es keine anderen Würfelnetze geben kann, wird gewonnen, wenn die Systematik in Abb. 1 erfasst wird.
Alle Sechslinge in Abb. 1 unten (gelb) sind keine Würfelnetze. Das sollte auch je begründet werden wie z. B.: Es können nie mehr als vier Quadrate in einer Reihe stehen, in einer Ecke dürfen sich nur immer höchstens drei Quadrate treffen. Man kann dann auch die Frage stellen: Wie viele Sechslinge gibt es überhaupt? (35). Weitere mögliche und interessante Fragen zu den Würfelnetzen sind: Warum hat jedes Netz genau fünf „Faltkanten“? Warum gibt es immer 14 „Randkanten“? (zusammengehörige Paare

farbig kennzeichnen!) Warum kann ein Würfelnetz nicht konvex d. h. ohne Einbuchtungen sein?
Schließlich kann die Frage auftauchen: Wie viele Netze haben die übrigen vier Platonischen Körper? Die Antwort kann für Tetraeder und Oktaeder in der Grundschule gefunden werden, keineswegs jedoch für Dodekaeder und Ikosaeder. Da soll es je 43 380 Netze geben. Diese immens große Zahl kann nur mitgeteilt werden. Immerhin können die Lernenden sehen, dass es in der Mathematik Überraschungen gibt und vielleicht ahnen sie, dass Dodekaeder und Ikosaeder grundsätzlich mathematisch anspruchsvoller sind.

2 Parkettieren mit Würfelnetzen

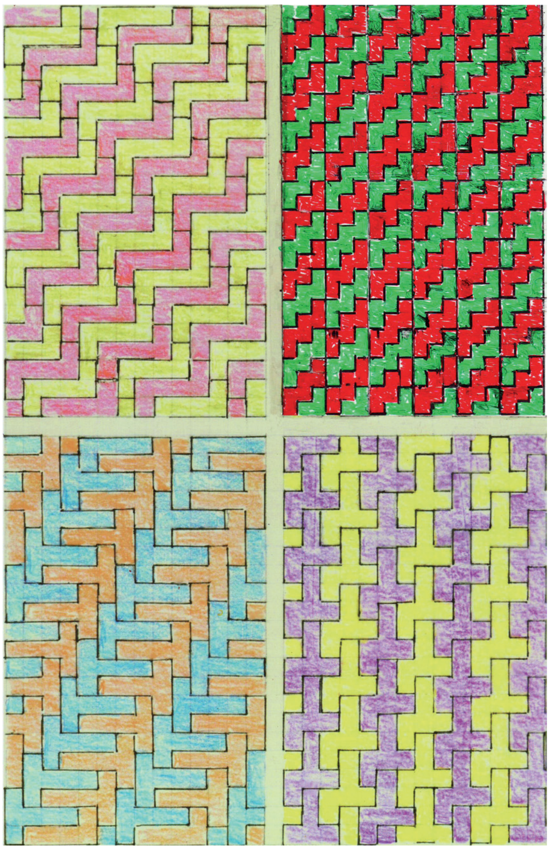


Abb. 2: Parkette

Kann man noch etwas Schönes mit den Würfelnetzen anfangen? Es wäre doch ziemlich ärmlich, nur zu wissen, dass es 11 Würfelnetze gibt. Deshalb: Schneidet irgendein Würfelnetz (Karton) aus, kopiert es (vielleicht 30-mal) und versucht, damit ein regelmäßiges Pflaster zu legen, die ausgeschnittenen Netze dienen jetzt als Pflastersteine. Hier könnt ihr euch als Designer z.B. für Kleiderstoffe, Gardinen, Tischdecken austoben. Tatsächlich kann man mit jedem der 11 Netze eine (oder mehrere!) ebene Pflasterung(en) erzeugen, in Gedanken sind diese unendlich ausgedehnt. Und Unendlichkeit spielt in der Mathematik eine zentrale Rolle.

3 Vom Würfel zum regulären Tetraeder

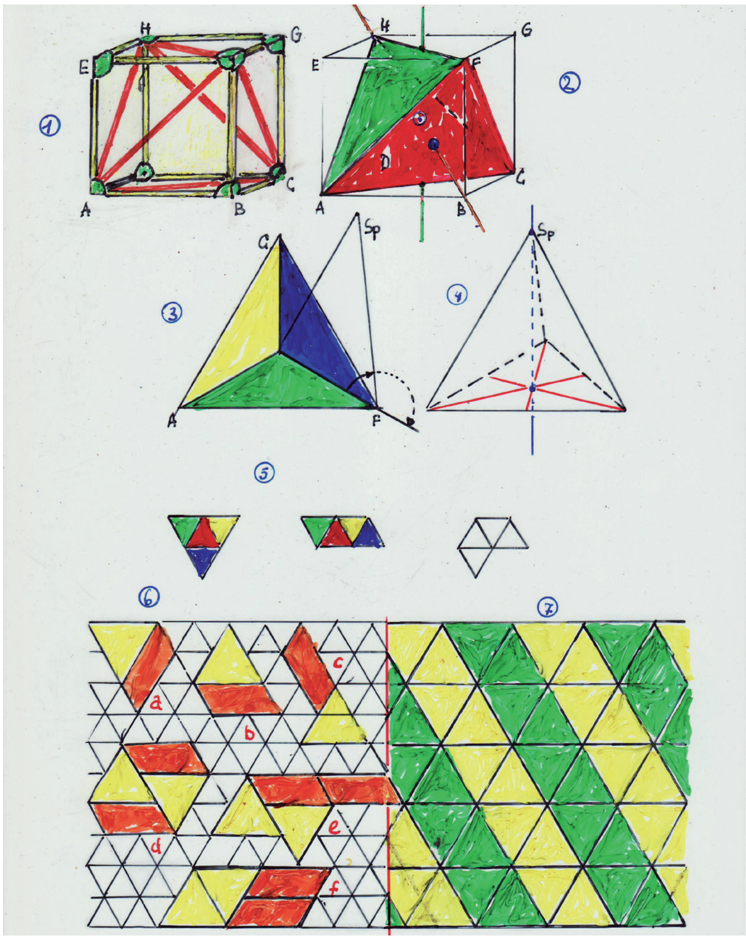


Abb. 3: Reguläres Tetraeder

Ein möglicher Zugang: Betrachtet die **Flächendiagonalen** des Würfels, was fällt euch dabei auf? Auf jedem Seitenquadrat des Würfels gibt es zwei Strecken, von einer Ecke zur gegenüberliegenden Ecke. Die beiden sind gleichlang, schneiden sich im Mittelpunkt des Quadrats und stehen dort senkrecht aufeinander (vier Rechte Winkel). Es ist hier unumgänglich, Kantenmodelle des Würfels herzustellen (Kanten aus Strohhalmen, Ecken aus dünnem kreisförmigem Karton mit vier Rechten Winkeln; da bleibt einer als Klebefläche). Dann: Nehmt sechs weitere andersfarbige Strohhalme und passt sie in das Kantenmodell so ein, dass jedes der sechs Quadrate in zwei Dreiecke zerlegt wird. Was entsteht? Im Glücksfall so etwas, was Abb. 3.1 im Schrägriss zeigt.
Spannend bleibt dann die Frage, inwieweit Schülerinnen und Schüler im Gefüge der roten Kanten einen Teilkörper des Würfels sehen. Das wird realisiert durch Einfügen von vier gleichseitigen Dreiecken.
Damit haben wir ein Flächennetz des neuen Körpers, des regulären Tetraeders (Abb. 3.2), wobei griech. tetra = vier und eder = Fläche bedeutet.
Es gibt eine unendliche Vielfalt an Tetraedern (Vierflächnern), die nicht regulär sind. Immer, wenn wir die drei Eckpunkte irgendeines Dreiecks mit einem vierten Punkt,

der nicht in der Ebene des Dreiecks liegt, verbinden, so erhalten wir ein Tetraeder, was auch gern **Dreieckspyramide** genannt wird (von griech. pyr = Feuer). Platon sah in der regulären Dreieckspyramide das Symbol des Feuers, was man gut nachvollziehen kann, wenn man ein offenes Feuer beobachtet. Was jeder wissen sollte: Die fünf vollständig regulären Körper werden **Platonische Körper** – die Körperseiten sind deckungsgleiche reguläre (r) Vielecke jeweils einer Sorte – genannt, und Platon hat sie als Symbole der vier Elemente und des Weltalls wie folgt zugeordnet:

Tetraeder	Hexaeder (Würfel)	Oktaeder	Ikosaeder	Dodekaeder
4 r. Dreiecke	6 Quadrate	8 r. Dreiecke	20 r. Dreiecke	12 r. Fünfecke
Feuer	Erde	Luft	Wasser	Weltall, Kosmos

Darüber kann man mit Grundschulkindern sprechen. Das setzt aber voraus, dass Modelle aller fünf Körper von den Kindern angefertigt wurden, was z.B. mit Hilfe des Uhrblattes einer Zeigeruhr relativ leicht möglich ist, wie wir es seit Jahren kennen.
Das Tetraeder (regulär oder nicht) ist insofern einzigartig unter allen Polyedern (Vielflächnern) als es die geringste mögliche Zahl an Flächen besitzt, eben nur vier. Weitere Besonderheiten des regulären Tetraeders: Seine Kippwinkel sind größer als 90°, so dass es nicht eigentlich rollen kann und deshalb sich nicht als „Spielwürfel“ eignet. Jede Fläche grenzt an die anderen drei, und man benötigt dabei genau vier Farben, wenn man sie so färben will, dass aneinander grenzende Flächen verschiedenfarbig sein sollen.
Nebenbei: Der Würfel erfordert drei Farben, das Oktaeder zwei, das Dodekaeder vier, das Ikosaeder drei.
Schaut man von oben auf ein stehendes Tetraeder, so sieht man drei Flächen (Abb. 3.3), also mehr als die Hälfte der Flächen, und man sieht alle vier Ecken und alle sechs Kanten. Es gibt nur zwei Flächennetze, und diese sind beide konvex (Abb. 3.5). Diese Netze kann man auch wieder als Bausteine benutzen wie in Abb. 3.6 oder in 3.7 angedeutet.
Das Bestimmen der Maße (Winkel, Längen, Flächeninhalte, Volumina) und damit auch das Zeichnen im Sinne der Darstellenden Geometrie kann in der Grundschule in aller Regel nicht systematisch betrieben werden. Da braucht man schon mindestens den Satz des Pythagoras. Aber die Lehrkraft sollte ihn kennen und gebrauchen können. Denn in der Grundschule kommt es entscheidend darauf an, **Ahnungen** der späteren Mathematik aufzubauen, wie Fröbel das gesehen hat. Geht es z.B. um die Länge der Flächendiagonalen in einem Quadrat, so kann an einem großen und möglichst genau gezeichnetem Quadrat die Diagonale gemessen und mit der Seitenlänge verglichen werden. Es ist dann schon eine Sternstunde, wenn Schülerinnen und Schüler zur Schätzung kommen, dass die Quadratdiagonale ein klein bisschen länger ist als das 1,4-fache der Seitenlänge, und deutlich kleiner ist als das 1,5-fache. Oder mit Plato selbst zu sprechen: Wenn die Seitenlänge aus fünf Längeneinheiten besteht, dann besteht die Diagonale ziemlich genau aus sieben Längeneinheiten. Noch besser ist der nächste Fall, das Zahlenpaar 12, 17.
Wie nicht anders zu erwarten ist, erbt das reguläre Tetraeder seine **Symmetrien** vom Würfel. Die 4 3-zähligen (orange) und die 3 2-zähligen (grün) Drehachsen sollte man durch Aufhängeversuche bestimmen lassen (Abb. 3.2). Es ergibt sich (jetzt vorgreifend auf spätere Kapitel), dass das reguläre Tetraeder eine 8 + 3 + 1 = 12-fache **Drehsymmetrie** aufweist, also halb so viele Drehungen wie der Würfel hat.

Geradezu spannend ist es, ob man es schafft, ohne Gewaltanwendung das eingeschriebene Tetraeder aus dem Würfel heraus zu holen und dann auch wieder zurück zu befördern (beide etwa als dünne Kantenmodelle realisiert). Es müsste doch ohne weiteres gehen, tut es aber nicht. Wie schafft man es trotzdem auf elegante Art?

4 Vom Würfel zum Oktaeder

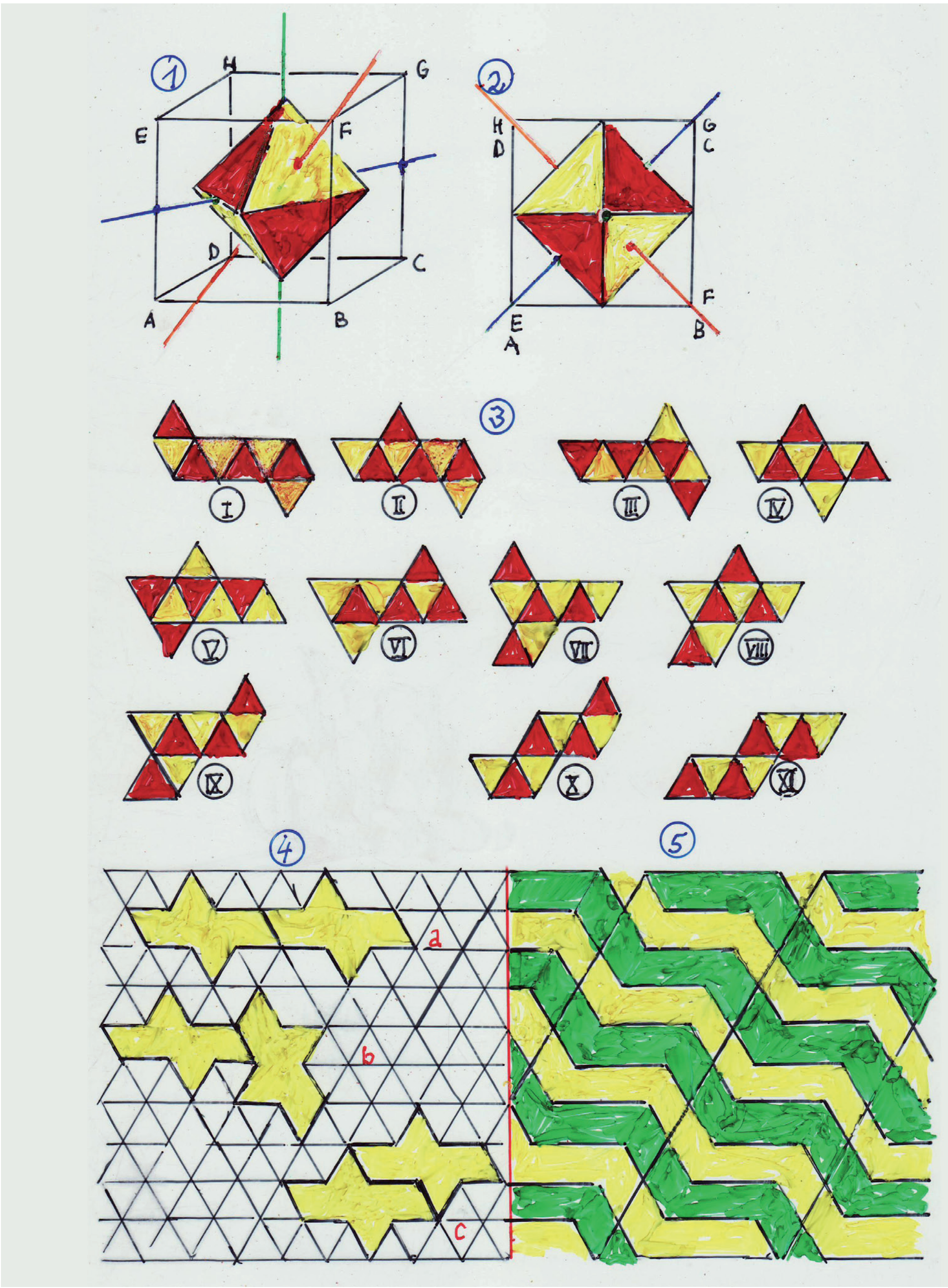


Abb. 4: Oktaeder

Eine ganz besonders enge Verwandtschaft, die man oft Dualität nennt, besteht zwischen dem Würfel und dem Oktaeder. Das Oktaeder können wir dadurch aus dem Würfel gewinnen, dass wir die sechs Mittelpunkte so miteinander durch Strecken verbinden, dass sie die 12 Kanten eines Körpers bilden, dessen Oberfläche aus acht regulären (gleichseitigen) Dreiecken besteht, das ist der Platonische Körper Oktaeder. Wir könnten auch sagen: Das Oktaeder ist auf dreifache Art eine Doppelpyramide, wobei die beiden Pyramiden je gerade und vierseitig sind.
In Abb. 4.1 haben wir einen Schrägriss und in Abb. 4.2 einen Grundriss (Blick von oben). Stellen wir gegenüber:

Würfel	8 Ecken	6 Seitenflächen	12 Kanten
Oktaeder	6 Ecken	8 Seitenflächen	12 Kanten

Das setzt sich nun auf die Drehachsen fort. Die 3 4-zähligen Drehachsen des Würfels (grün), die durch die Mittelpunkte zweier einander gegenüberliegender Quadrate verlaufen, sind auch die 3 4-zähligen Drehachsen des Oktaeders, die durch zwei einander gegenüberliegende Ecken des Oktaeders verlaufen. Analog findet man, dass die 4 3-zähligen Eckenachsen des Würfels (orange) zu Seitenmittenachsen von Dreiecken des Oktaeders werden. Und die Kantenmittenachsen des Würfels (blau) bleiben auch solche des Oktaeders.
Natürlich sind es nur Drehachsen, wenn man die Färbung der Seitenflächen nicht beachtet.
Zusammengefasst: Würfel und Oktaeder weisen dieselbe Drehsymmetrie auf. Umso mehr kann man vielleicht darüber staunen, dass man den ganzen dreidimensionalen Raum mit Würfeln derselben Größe restlos und überlappungsfrei ausfüllen könnte, nicht aber mit Oktaedern und auch nicht mit Tetraedern, ebenso nicht mit den beiden weiteren Platonischen Körpern. Der Würfel ist als Raumfüller einzigartig unter den Platonischen Körpern.

Die enge Verwandtschaft von Würfel und Oktaeder schlägt sich in den Flächennetzen nieder. Das Oktaeder hat auch 11 Flächennetze (siehe Abb. 4.3). Man kann aus jedem Flächennetz des Würfels mit Quadraten ein Flächennetz des Oktaeders mit Dreiecken gewinnen, so z.B. aus Nr. 10 in Abb. 1 die Nr. XI in Abb. 4.3. Das gilt für alle 11 Netze: Alle sind nicht konvex. Jedes hat sieben Faltkanten und zehn Randkanten. In einer Reihe können höchstens sechs Dreiecke liegen, und das trifft auf sechs Netze zu. Was bedeutet das? Usw.

Gleichfalls ist es möglich, die Flächennetze des Oktaeders als Bausteine für „größere“ Figuren zu verwenden. In Abb. 4.4 haben wir drei Figuren aus je zwei Netzen des Typs IV. Abb. 4.5 zeigt, wie man mit Figuren, die aus zwei Exemplaren von Netz I zusammengesetzt sind, die Ebene parkettieren kann.

5 Ein echtes Highlight – die Stellaoctangula (Achtstern) des Johannes Kepler

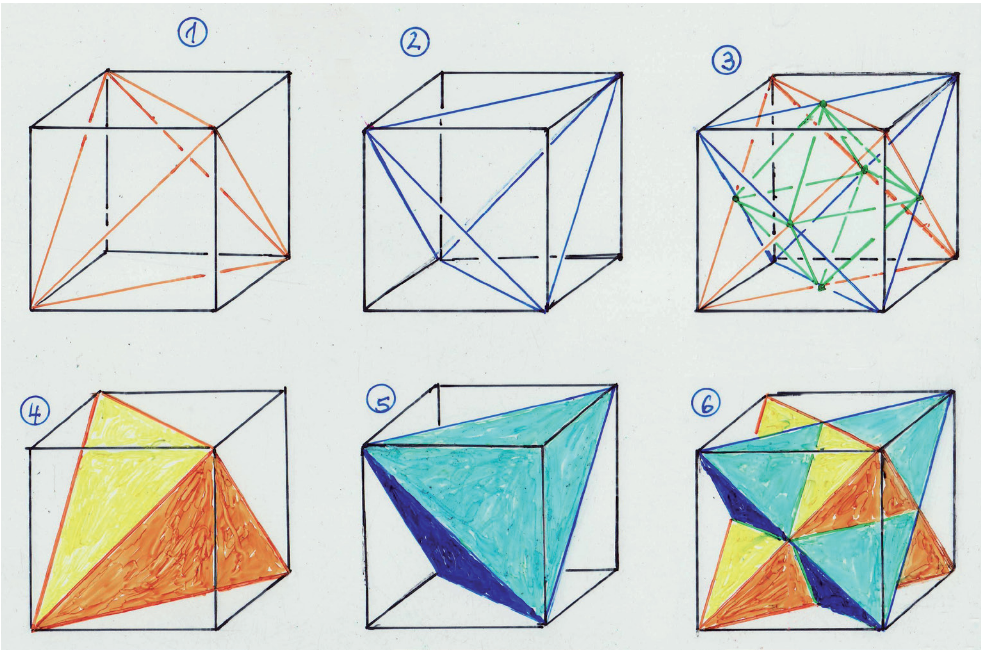


Abb. 5: Stellaoctancula

Ein nochmaliger Blick auf die Abb. 3.1 lehrt, dass das dort eingeschriebene reguläre Tetraeder nur vier der acht Würfelecken und nur sechs der 12 Flächendiagonalen in Beschlag nimmt, so dass sich ein zweites Tetraeder einschreiben lässt, das mit dem ersten deckungsgleich ist (siehe Abb. 5.1 und Abb. 5.2). Und welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden?
Realisiert man nun beide Tetraeder zugleich im Würfel (aus verschiedenfarbigen Kantenmodellen, hier orange und blau), so liefert das einen **Durchdringungskörper** (siehe Abb. 5.3), der aus einem Kern besteht und aus einer Schale oder Hülle. Die Schale ist hier der Würfel, von dem wir ausgingen, und der Kern ist der Körper, der beiden Tetraedern angehört. Sobald man wahrnimmt, dass sich auf jedem Quadrat des Würfels jeweils eine orange und eine blaue Kante schneiden, und zwar in der Quadratmitte, dann weiß man, dass der Kern nichts anderes als ein Oktaeder ist. Wir haben also in der Stellaoctangula drei Platonische Körper, nämlich Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder im besten Sinne des Wortes harmonisch vereint.
So unverzichtbar die Kantenmodelle (Abb. 5.1, 5.2, 5.3) sind, so dürfen nicht die Flächenmodelle vergessen werden (Abb. 5.4, 5.5, 5.6) insbesondere nicht die Stellaoctangula. Es kann für Lernende ein mathematikästhetisches Erlebnis sein, einen solchen Achtstern aus Karton zu basteln und auszuschmücken. Ein Weg dahin: Zuerst das Oktaeder bauen (nach irgendeinem Netz in Abb. 4.3), dann acht passende Tetraeder herstellen und auf dem Oktaeder anbringen.

Zur Vertiefung:
Die Kantenlänge der acht aufgesetzten kleinen Tetraeder beträgt gerade die Hälfte der Kantenlänge der beiden großen Tetraeder. Wenn dann klar ist (Analogie zu Würfeln!), dass das Volumen der großen Tetraeder das 8-fache von dem Volumen der kleinen beträgt, dann hat das Oktaeder das Volumen von vier kleinen Tetraedern, und die ganze Stellaoctangula besitzt das Volumen von 12 kleinen Tetraedern.
Welches Volumen hat aber ein kleines Tetraeder? Wer die Volumenformel für Pyramiden kennt (Grundfläche mal Höhe geteilt durch drei) und die Kantenlänge der kleinen Tetraeder bestimmen kann ($\frac{\sqrt{2}}{2}a$ mit a als Kantenlänge des Würfels), der kommt zum Ergebnis: Volumen eines kleinen Tetraeders = $\frac{1}{24}a^3$. Das bedeutet, dass die 12 kleinen Tetraeder, aus denen die Stellaoctancula besteht, zusammen das halbe Volumen des Würfels ausmachen. Ein schönes Ergebnis, aber kann man auch auf andere Arten als durch Rechnerei dazu kommen? In der Tat: Man beachte dazu die Spiegelebenen des Würfels und wie sie den Würfel in 48 Tetraeder zerlegen.

6 Noch ein Durchdringungskörper und zwei weitere Körper

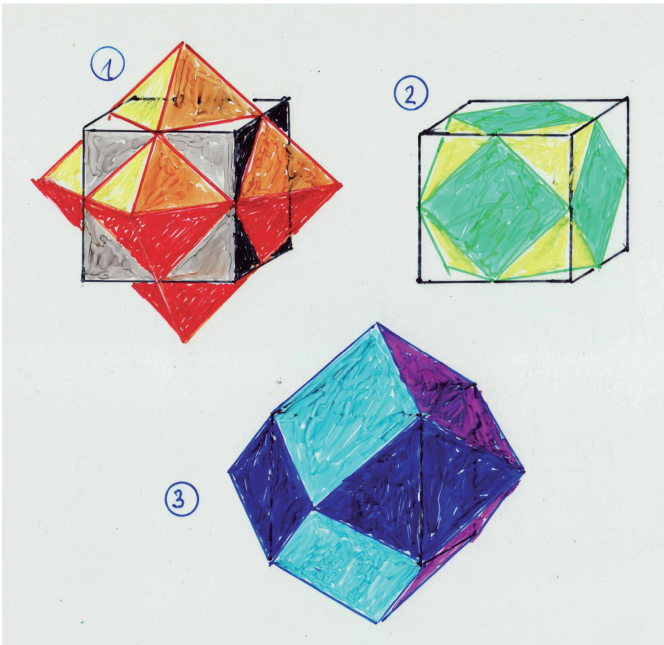


Abb. 6: Vierzehnzackiger Würfel-Oktaeder-Stern, Kuboktaeder, klassisches Rhombendodekaeder

In Abb. 6.1 sehen wir, wie sich ein Würfel und ein spezielles Oktaeder gegenseitig durchdringen und einen schönen Stern mit acht Würfelzacken und sechs Oktaederzacken bilden. Es sieht so aus, als ob auf die sechs Würfelflächen vierseitige Pyramiden aufgesetzt worden wären, deren Kantenlänge halb so lang wie die Flächendiagonalen des Würfels sind .

($\frac{\sqrt{2}}{2}a$, mit a als Länge der Würfelkanten). Mit dieser Sicht ist der 14-zackige Stern leicht

als Flächenmodell anzufertigen. Klar wird dann, dass er nicht auf einer Seitenfläche stehen kann, also nicht konvex ist, wie alle Sterne, so auch die Stellaoctancula. Trotzdem gilt auch hier der berühmte Eulersche Polyedersatz: Zahl der Ecken + Zahl der Flächen = Zahl der Kanten + 2 (Hier: 26 + 48 = 72 +2). Auf jeden Fall ist das möglichst pfiffige Auszählen der Ecken, Flächen und Kanten eine dauernde schöne Aufgabe, wenn man sich mit Polyedern befasst („befasst“ auch wörtlich genommen!).
Wir kommen zu einem weiteren wichtigen Polyeder, wenn wir alle 14 Zacken wegschneiden (siehe Abb. 6.2). Das ist das **Kuboktaeder** (lat. cubicus = Würfel), dessen Oberfläche aus sechs Quadraten als Erbe vom Würfel und acht regulären Dreiecken, als Erbe vom Oktaeder besteht. Es handelt sich nicht um einen Platonischen Körper, denn seine Oberfläche besteht ja aus zwei Sorten von regulären Vielecken, nämlich aus Dreiecken und Quadraten. Solche Polyeder nennt man auch halbregulär oder archimedisch (nach Archimedes (um 287 v. Chr. – 212 v.Chr.), weil dieser bedeutendste Mathematiker der Antike die später nach ihm benannten archimedischen Körper schon kannte, nämlich: außer den unendlich vielen Prismen und Antiprismen genau 13 Polyeder, darunter das Kuboktaeder. Man könnte es auch **abgestumpfter Würfel** nennen und ahnt dann die Handhabe, wie man auch andere Platonische Körper durch Abstumpfen zu Archimedischen Körpern macht. Das populärste Beispiel ist zweifellos der Telstar-Fußball, dessen Oberfläche aus 20 regulären Sechsecken und 12 regulären Fünfecken besteht, und das in harmonischer Weise so, dass in jeder Ecke zwei reguläre Sechsecke und ein reguläres Fünfeck zusammenstoßen. Der Telstar-Fußball ist ein **abgestumpftes Ikosaeder**. Das könnt ihr noch weiter ausführen, vielleicht sogar einen solchen Fußball basteln. Auf jeden Fall könnt ihr die Anzahl der Ecken und Kanten bestimmen und wieder den Satz von Euler bestätigen.
Das Kuboktaeder ist der **Kern** unserer Durchdringungsfigur in Abb. 6.1. Was ist ihre Schale? Man erhält sie, indem man die Spitzen der 14 Zacken sinnvoll verbindet. Es entsteht ein neuer Körper, dessen Oberfläche aus 12 gleichgroßen **Rhomben** oder Rauten besteht (siehe Abb. 6.3). Begründet, dass wirklich alle Kanten des Körpers gleiche Länge aufweisen. Bestimmt die Länge ihrer beiden Diagonalen. Unseren neuen Körper nennt man **Rhombendodekaeder**. Es ist kein Archimedischer Körper, wieso nicht?
Und wie sieht es mit den **Drehsymmetrien** aus? Vielleicht gibt es ein Staunen darüber, dass alle drei Körper der Abb. 6 13 Drehachsen besitzen und bei 24 Drehungen genauso wie der Würfel mit sich selber zur Deckung kommen.

7 Hängende und stehende Würfel, die Drehsymmetrien des Würfels

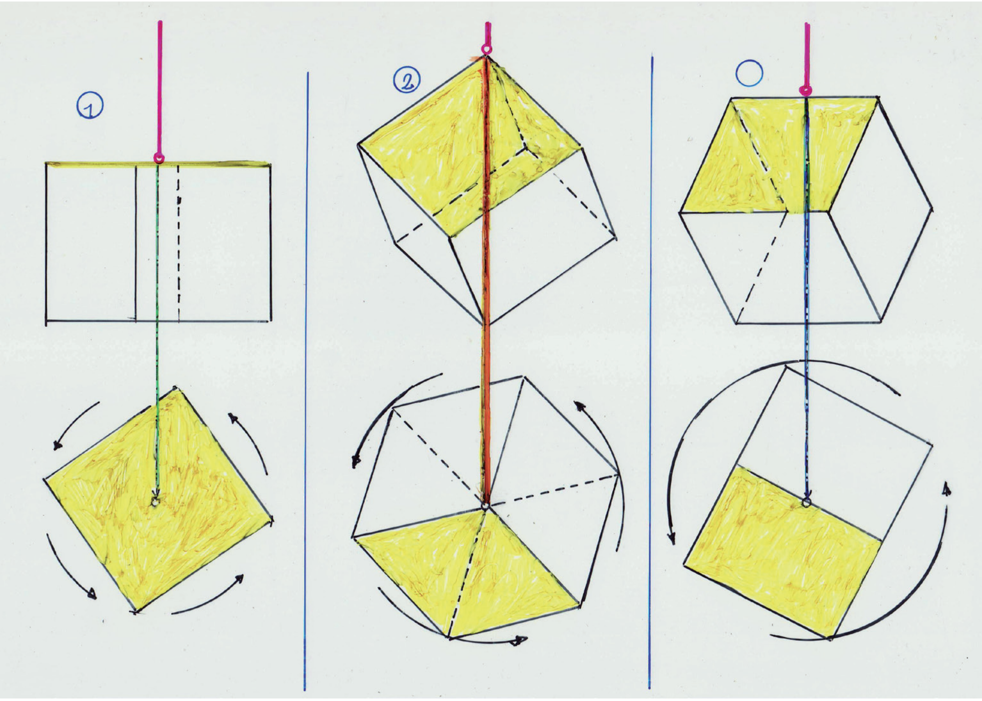


Abb. 7: Drei Sorten von Drehachsen

Das ist wieder eine Idee von Fröbel, und zwar eine bedeutsame und nicht etwa ein nachgeordneter Rat aus der „Methodikkiste“. Denn: Erstens: Durch das Aufhängen wird die geometrische Symmetrie-Idee mit einem grundlegenden und im Alltag bedeutsamen physikalischen Phänomen verbunden, mit dem **Gleichgewicht**. Damit besitzen wir ein handhabbares Mittel, Symmetriefragen experimentell zu verfolgen, und zwar nicht nur bei Körpern sondern auch bei flächigen Gebilden, angenähert durch dünne Scheiben und bei linearen Gebilden, angenähert durch dünne Drähte. Das Tragmedium (Faden, Kettchen), das an irgendeinem Punkt des Körpers, der untersucht werden soll, befestigt wird, ist straff gespannt und von oben nach unten gerichtet. Bleibt nun der hängende Körper in der Waage, können wir uns vorstellen, dass der Faden Teil einer Geraden ist.

Zweitens: Der aufgehängte und sich in Waage befindliche Körper kann sich um den Faden und seine gedachte Verlängerung **drehen** (rotieren), ohne dabei die Waagebefindlichkeit zu verlieren. Damit ist der Faden Teil einer **Drehachse**. Dieses dynamische Moment ist der springende Punkt zum Verständnis von Symmetrie.
Ist nun der Körper eine Kugel – und damit hat Fröbel begonnen –, so kann der Faden an jedem beliebigen Punkt der Oberfläche befestigt werden, und die Kugel kann um beliebige Winkel gedreht werden, immer kommt sie dabei **mit sich selbst zur Deckung**. Wie ist es aber beim Zylinder (Walze)?

Drittens: An welchen Punkten muss man den Würfel aufhängen, damit er schön im Gleichgewicht hängt? Es kann entdeckt werden: Der Aufhängungspunkt ist entweder

die Mitte einer Seitenfläche (Abb. 7.1) oder eine Ecke (Abb. 7.2) oder schließlich die Mitte einer Kante (Abb. 7.3). Der Würfel besitzt also **drei Sorten von Drehachsen**. Warum wohl ist dabei der zweite Fall am anspruchsvollsten?
Dreht man den Würfel langsam und möglichst gleichmäßig um eine seiner Achsen, so erscheint in **regelmäßigen Abständen das gleiche Bild**. Der Würfel als Ganzes nimmt immer wieder denselben Platz im Raum ein, jedoch Teile von ihm wechseln i.a. ihre Plätze. Ist die Drehachse eine Seitenmittenachse (Abb. 7.1), so wiederholen sich vier Gleichgewichtslagen, und es gibt vier Drehwinkel (90°, 180°, 270°, 360°) in einem der zwei möglichen Drehsinne (siehe Abb. 7.1 unten, wo wir den Würfel von oben betrachten). Die Drehung um 360° führt den Würfel wieder in seine Ausgangsstellung zurück, man spricht daher von der **Ruhedrehung** oder Nulldrehung. Da es in unserem Falle 1 (Abb. 7.1) vier mögliche Gleichgewichtslagen gibt, nennt man die Drehachse 4-zählig. Um die vier Gleichgewichtslagen wirklich auch festzuhalten, markieren wir auf der waagerechten Tischplatte als Standfläche eine quadratische Fläche (gleich der Seitenfläche des Würfels). In den Fällen 2 und 3, wo wir 3-zählige und 2-zählige Drehachsen haben müssen wir uns eine einfache Standvorrichtung basteln, die im Falle 2 aus einem prismatischen Aushub mit einem regulären Dreieck als Grundfläche besteht, im Falle 3 aus einem quaderförmigen Aushub geeigneter Größe, so dass der Würfel jeweils aufrecht bleiben kann. Durch diese Bemühungen um das Stehen der Würfel wird der Übergang vom Kontinuierlichen zum Diskreten deutlich markiert, eine wichtige Angelegenheit auch in ästhetischer Hinsicht.

Viertens schließlich: Die hängenden und stehenden Würfel bieten hervorragende Möglichkeiten, geometrisches Sehen anzuregen und zu pflegen und dabei grundlegende Gedanken und Fertigkeiten zum Zeichnen kennen zu lernen. Dabei kann es sehr nützlich sein, die Ecken mit Buchstaben (etwa wie üblich A,B,C,D,E,F,G,H) zu benennen.

8 Die Drehsymmetrien des Würfels im Überblick

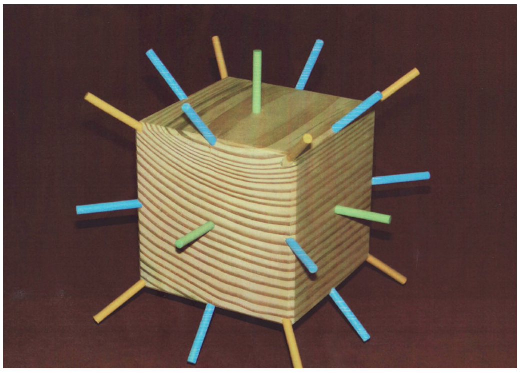


Abb. 8: 13 Drehachsen, 24 Drehungen

Dieses Bild bedarf eigentlich keines Kommentars. Man sieht alle 13 Drehachsen des Würfels, geordnet nach Sorten: Drei Seitenmittenachsen, 4-zählig, grün; vier Eckenachsen, 3-zählig, orange; sechs Kantenmittenachsen, 2-zählig, blau. Da die Ruheab-

bildung nur einmal zählt, hat der Würfel 3x3 + 4x2 + 6x1 + 1 = 24 Drehungen. Alle Drehachsen verlaufen durch den Mittelpunkt.
Eine weiterführende Frage könnte die „Verteilung“ der Drehachsen betreffen: Unter welchem **Winkel** schneiden sich zwei ausgewählte Drehachsen, etwa eine grüne mit einer benachbarten blauen? Noch anspruchsvoller ist das **Rechnen mit Drehungen**, wobei die Rechenoperation das Nacheinanderausführen (oder Verketten) von zwei beliebigen Drehungen ist. Dies führt zum zentralen Begriff einer ästhetischen Geometrie, nämlich dem der **Gruppe**. In jedem Fall sollte die Lehrkraft über Grundkenntnisse der Gruppentheorie verfügen. Mit Pfeildiagrammen kann man eine „ikonische“ Gruppentheorie mehr als ahnen lassen.

9 Zur Vertiefung: Symmetrie von Teilkörpern des Würfels

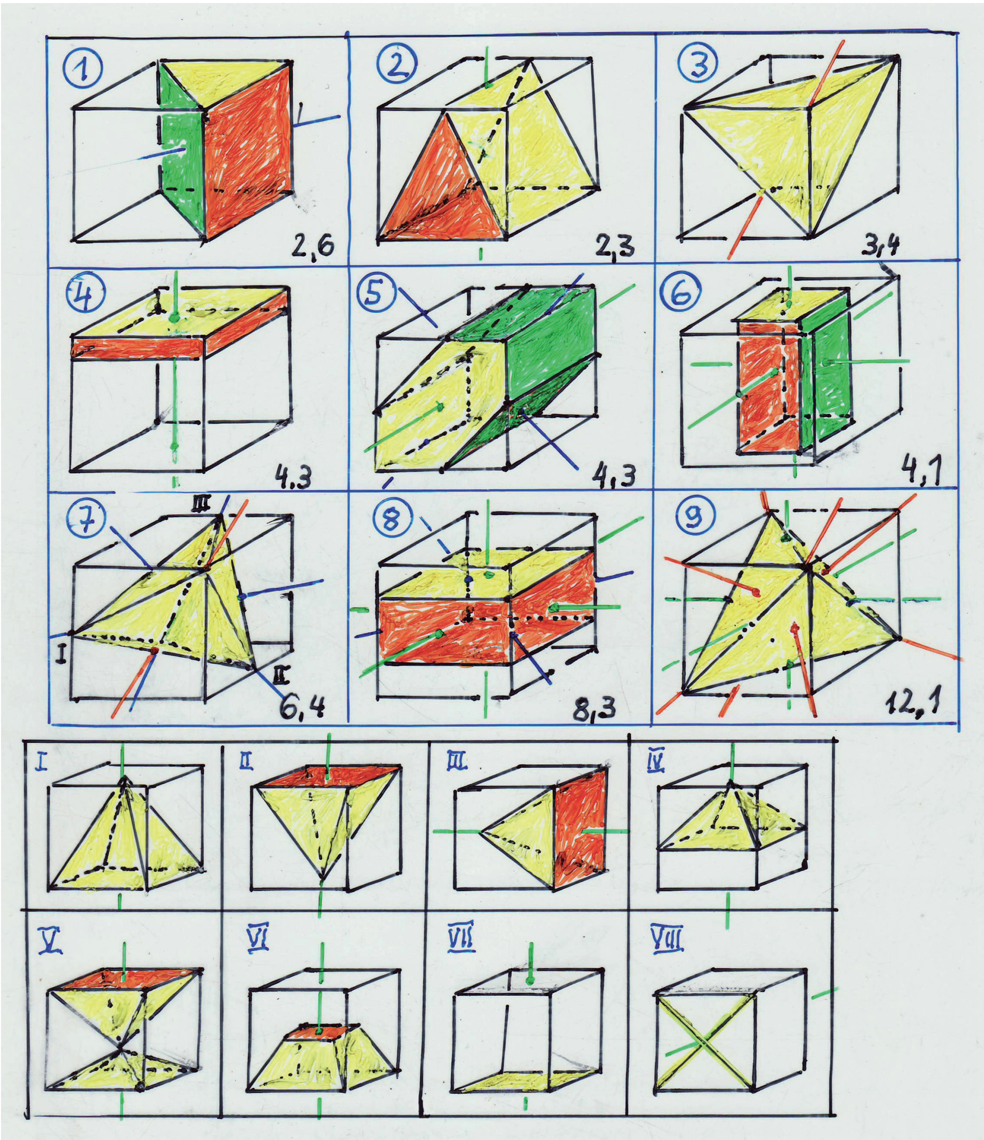


Abb. 9: Teilkörper des Würfels, Untergruppen

Es dürfte kaum eine Aktivität geben, die so faszinierend und ergiebig ist, wie die Beschäftigung mit interessanten Teilkörpern des Würfels.
Der ästhetische Aspekt steht dabei im Vordergrund. Einen Zugang könnte die Aufgabe eröffnen: Grenzt durch gerade Linien in einem gegebenen Schrägbild des Würfels einen einfachen Teilkörper des Würfels ab, der mindestens eine Drehachse besitzt, die zugleich auch eine Drehachse des Würfels ist. Färbt dann die Flächen des Teilköpers, aber so, dass die Drehsymmetrie nicht zerstört wird. Das ist eine komplexe aber auch sehr offene Aufgabe. Daher ist es vielleicht gut, zunächst an einem ganz einfachen Beispiel im Klassengespräch die Aufgabenstellung zu erläutern (siehe Abb. 9 unten): Hat man sich für eine gerade vierseitige Pyramide als Teilkörper entschieden, so bietet es sich an, eine Seitenfläche des Würfels als Grundfläche der Pyramide und den Mittelpunkt der gegenüberlegenden Seitenfläche als Spitze der Pyramide zu wählen (Abb. 9.I). Ganz offenbar hat die Pyramide nur eine Drehachse, und diese ist 4-zählig genauso wie die flache quadratische Säule in Abb. 9.4.
Die Pyramide muss natürlich nicht diese Lage einnehmen, vielmehr kommt jede der sechs Seitenflächen des Würfels in Frage. Es gibt, so sagt man, sechs **gleichberechtigte Lagen** für die Pyramide im Würfel. Haben allerdings zwei Lagen dieselbe Drehachse (wie in 9.I und 9. II), dann wird nur eine gezählt. Anders ist allerdings die Lage in Abb. 9III, da haben wir eine andere Drehachse. Insgesamt zählen wir drei Sorten der sechs Lagen. Es gibt drei Drehachsen, und jede kann doppelt gebraucht werden.
Es gibt weitere Variationen. Die Höhe der Pyramide muss nicht gleich der Kantenlänge des Würfels sein (Abb. 9.IV). Darüber hinaus braucht die Grundfläche der Pyramide nicht so groß wie ein Würfelseitenquadrat zu sein. Es kommt nur darauf an, dass die Figur genau eine 4-zählige Drehachse hat (Abb. 9.V, 9.VI). Insofern ist die flache quadratische Säule in Abb. 9.4 ein weiteres Beispiel. Die dort angegebenen Zahlen 4 und 3 besagen: 4 Drehungen, 3 verschiedene gleichberechtigte Lagen.
Schließlich können wir auch auf die Körpereigenschaft verzichten und nur Flächen (Abb. 9VII) oder gar nur Linien (Kreuz in Abb. 9.VIII) als Figuren wählen.
Soll die Tabelle in Abb. 9 oben durchgearbeitet werden, so wird man natürlich je nach Stand der Schüler vorgehen. Selbst wenn sie in der vorliegenden Form eingesetzt wird, gibt es Möglichkeiten zum kritischen Nachfragen, vor allem aber Anlässe zur Variation und verbesserten Darstellung. Im Übrigen ist die Tabelle insofern vollständig, da sie alle echten Untergruppen der Drehgruppe des Würfels repräsentiert.
Hier nur noch zwei Hinweise:
Der Körper in Abb. 9.7 ist eine Doppeldreieckspyramide mit dem Dreieck I, II, III als gemeinsamer Grundfläche, welche aber in keiner Lage zu sehen ist. Hier ist es besser, die Symmetrien des genannten Dreiecks zu untersuchen. Analoges gilt für die quadratische Säule (Abb. 9.8).
Wenn wie in Abb. 9.6 und in Abb. 9.9 in jeder gleichberechtigten Lage (6 bzw. 2) stets dieselben Drehachsen gebraucht werden, dann haben wir eine ganz besondere Situation, deren Bedeutung aber erst bei wesentlich fortgeschrittenen Studien erkennbar werden kann. Es geht dann um spezielle Untergruppen, so genannte Normalteiler.

10 Anmerkungen zu Soma-Würfeln

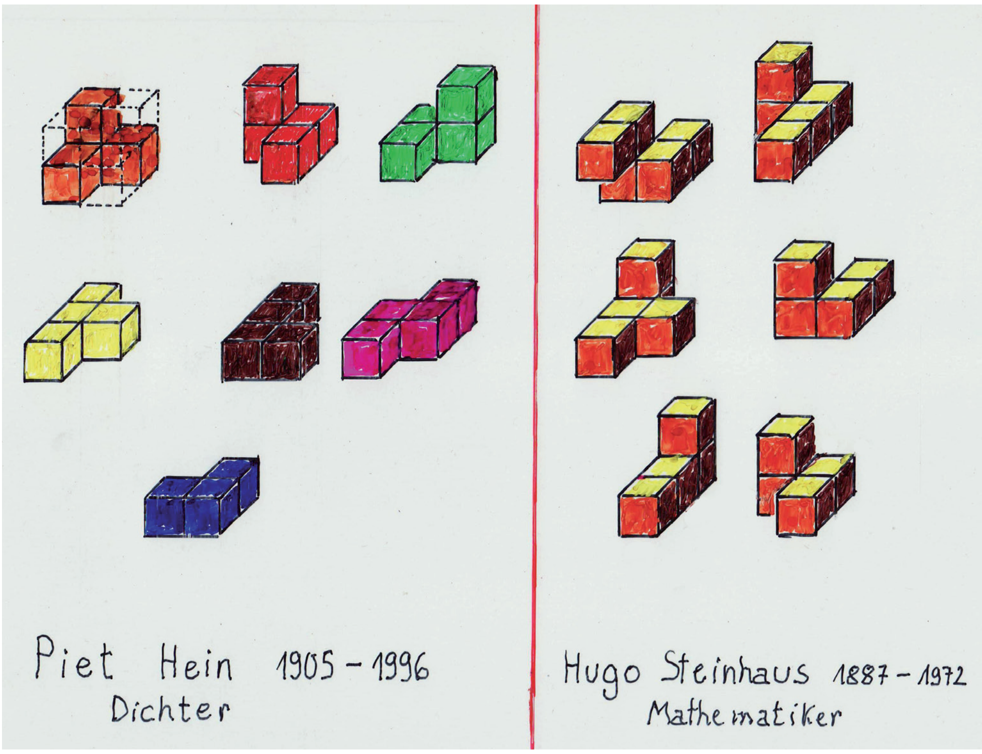


Abb. 10: 2 Soma-Würfel-Systeme

Wie man dem Internet entnehmen kann, spielen Somawürfel in Kindergärten und Grundschule anscheinend eine bevorzugte Rolle. Leider reduziert sich das Spielen allzu oft auf die Frage: Wer baut aus den Teilen am schnellsten einem Würfel? Das ist schade, denn wenn wir uns auch im wörtlichen Sinne mit Somawürfeln **befassen**, gibt es zahlreiche Möglichkeiten, auf interessante Art mathematisch aktiv zu werden.
Zunächst könnten wir uns mit der Gestalt der Bausteine etwas näher befassen. Dass sie oft krumm“ genannt werden, ist nur scheinbar kindgemäß und auf jeden Fall irreführend. Gemeint ist ja, dass sie **nicht konvex** sind. Diesen Ausdruck müssen und können wir den Lernenden zumuten, wenn wir vereinbaren: Ein Polyeder ist dann und nur dann konvex, wenn er auf jede Seitenfläche gelegt werden kann. Das führt dazu, die Seitenflächen genau anzusehen und die Flächen, auf denen der Körper nicht liegen kann zu kennzeichnen und abzuzählen. Der orange Würfel in Abb. 10 (Piet Hein) besitzt 12 Flächen, auf sechs Flächen kann er nicht stehen. Der blaue Stein besitzt acht Flächen, auf zwei Flächen kann er nicht stehen, usw. Es lohnt sich, Flächennetze der Somawürfel zu basteln. Wie kann man den orangefarbenen Körper zu einem konvexen Körper machen? Es kann entdeckt werden: Eine Kopie dieses Somasteins dem vorhandenen zugefügt lässt einen Würfel entstehen (aus acht kleineren Würfeln). Das heißt aber auch: Mit unendlich vielen solcher oranger Somasteine könnte ich den ganzen dreidimensionalen Raum ausfüllen, kurz: Der orange Somastein ist ein **Raumfüller**. Und die anderen?

In aller Regel sind in Kindergarten und Schule lediglich die Somawürfel von Piet Hein bekannt und nicht die von Hugo Steinhaus. Das ist insoweit verständlich, als es sehr viel schwieriger und mühseliger ist, aus allen sechs Steinen von Steinhaus einen Würfel zu bauen. Man könnte aber versuchen, die obigen Aktivitäten zu wiederholen und Vergleiche anzustellen.

11 Färben von Würfeln

Hier handelt es sich um zwei Übungsblätter, die kaum detailliert kommentiert werden müssen, es reichen Stichworte.

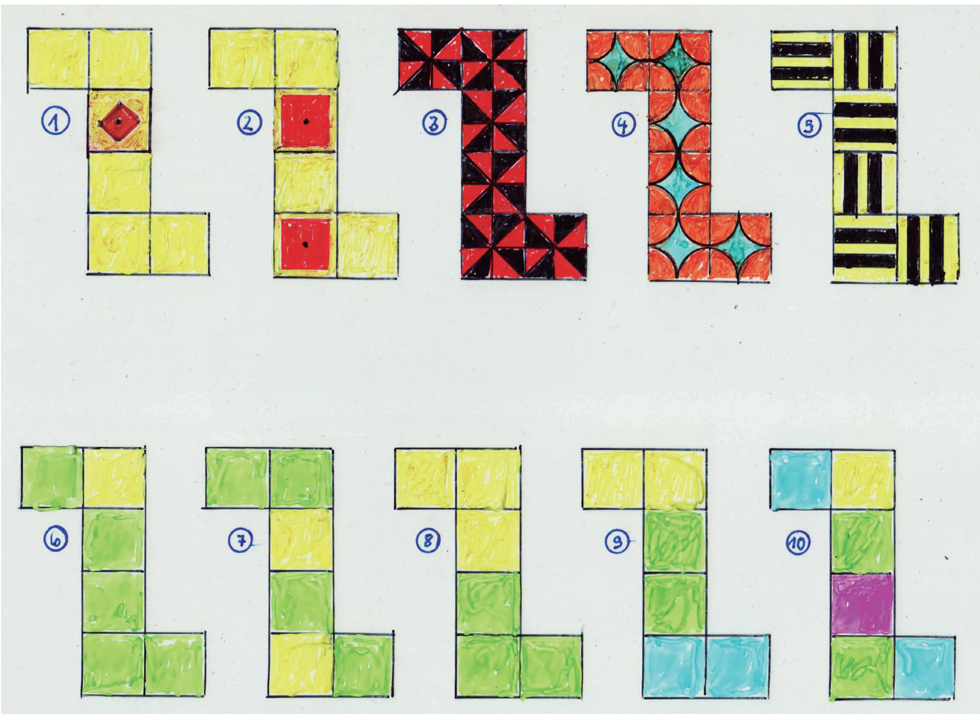


Abbildung 11: Symmetrien gefärbter Würfel vom Netz aus betrachtet

11.1 Ein kleineres Quadrat mittig auf eine der sechs Seitenflächen malen. Welche Drehungen des Würfels sind möglich, die auch das rote Quadrat auf dem Platz belassen? Wie kann das rote Quadrat anders aber doch mittig gemalt werden, damit dasselbe erzielt wird?

11.2 Welche Drehungen des Würfels sind auch Drehungen der beiden Quadrate? Was wäre, wenn die beiden roten Quadrate mittig in benachbarten Seitenflächen gemalt würden? Untersuche den Fall, das auf drei Würfelseiten mittig ein Quadrat gemalt würde.

1.3, 11.4, 11.5: Welche Drehungen des Würfels sind verträglich mit den gemalten Mustern?

11.6 bis 11.10: Welche Abbildungen des Würfels sind farbtreu?

12 Die bunten Würfel des englischen Mathematikers und Offiziers MacMahon:

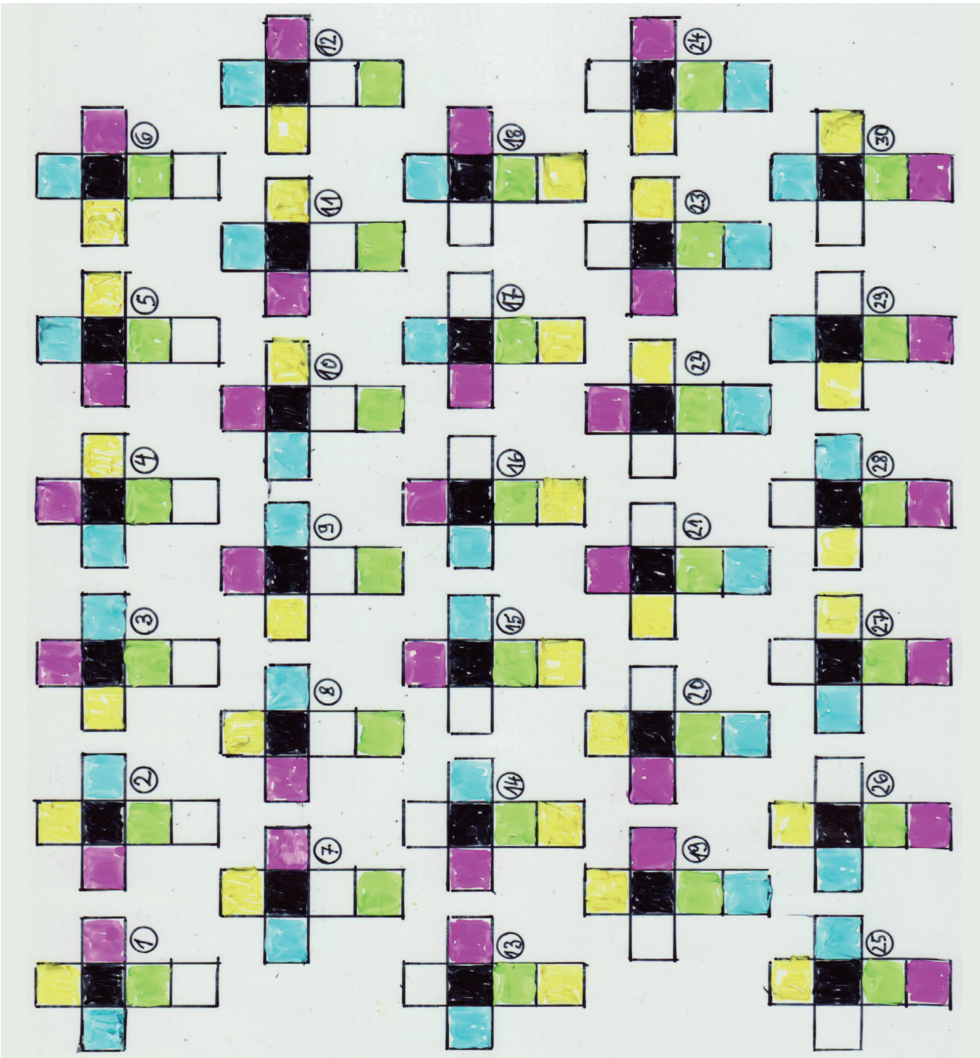


Abb. 12: Dreißig mit sechs Farben gefärbte, verschiedene Würfel

Hier sind Würfel mit sechs Farben bemalt (schwarz, weiß, rot, grün, blau gelb). Zu untersuchen ist, ob es darunter Würfel gibt, die mit mindesten einem anderen in der Farbverteilung auf den sechs Flächen übereinstimmen. – Wie kann man das Bemalen planvoll so machen, dass man alle Möglichkeiten erfasst aber jede nur einmal? Wie viele Möglichkeiten gibt es noch, wenn man die Grundfläche schon schwarz, die Deckfläche weiß und eine der vier restlichen Mantelflächen grün gefärbt hat? Es muss also genau 30 verschieden gefärbte Würfel geben. Überprüft, ob, es zu jedem Würfel einen anderen gibt, der sein Spiegelbild ist, z. B. 21 und 22.
Nun die berühmteste Aufgabe: Wählt irgendeinen der 30 Würfel aus und sucht dann noch sieben weitere Würfel, damit ihr mit den acht Würfeln einen 2x2x2-Würfel so zusammensetzen könnt, dass der größere Würfel dieselbe Farbverteilung besitzt wie der ursprünglich gewählte kleinere Würfel. Es geht immer, aber kann man die Suche der sieben passenden Würfel planvoll durchführen?

13 Übungen zum Sehen und Zeichnen

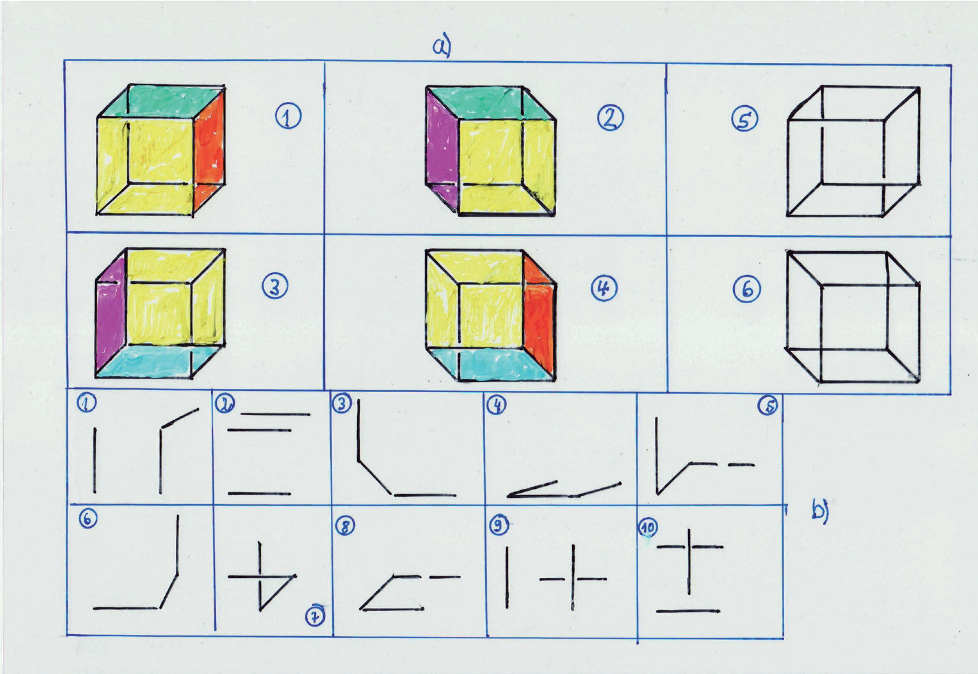


Abb. 13: a) Ansichten unterscheiden b) Zeichnungen ergänzen

a)

1. Man sieht den Würfel von vorn, oben, rechts.
2. Man sieht den Würfel von vorn, oben, links
3. Man sieht den Würfel von vorn, unten, links
4. Man sieht den Würfel von vorn, unten, rechts
   Die Rückseite (hintere Seite) ist nie zu sehen.
5. Eine unmögliche Figur, wie sie Escher mehrfach künstlerisch gestaltet hat.
6. Eine zweideutige Darstellung, entweder man sieht von vorn, unten, rechts oder von vorn, oben, links.

Eine Linie, die hinter einer anderen Linie liegt, muss an der vermeintlichen Schnittstelle unterbrochen werden.

b)

1 bis 10. Hier sind immer drei der 12 Kanten eines Würfels gezeichnet, der Rest ist zu ergänzen. Das ist in jedem Falle eindeutig möglich. Das steht im Zusammenhang mit einem berühmten Satz von Pohlke: Drei von einem Punkt in verschiedene Richtungen verlaufende Strecken lassen sich stets zu einem Würfelbild ergänzen.

14 Vom Billschen Design zur Kristallographie

Der große Schweizer Architekt und Designer Max Bill (1908–1994) hat in seinem Bemühen, eine mathematiknahe Theorie der Ästhetik zu kreieren, u.a. auch das Halbieren von Gegenständen (z.B. von Kugeln und Würfeln) einbezogen. Nun ist es so, dass jede Ebene, die durch den Mittelpunkt eines Würfels verläuft, den Würfel in zwei zueinander kongruente Körper zerlegt, dass es also unendlich viele Würfelhalbierungen gibt (Beweis?). Aus ästhetischen Gründen suchte er nach speziellen, interessanten endlich vielen Halbierungen und fand diese durch die zusätzliche Forderung, dass die Schnittebenen durch Ecken und / oder durch Kantenmitten des Würfels verlaufen müssten. Da bleiben von den unendlich vielen genau vier Halbierungsmöglichkeiten übrig (Abb. 14).

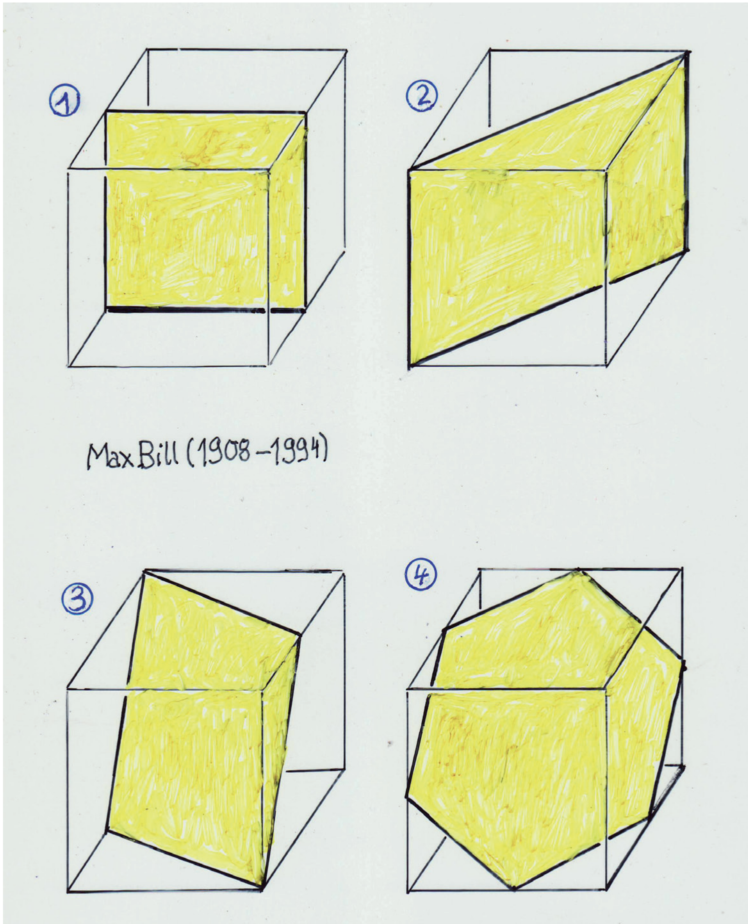


Abb. 14: Die vier Billschen Halbierungsschnitte

In Abb. 14.1, wo die Schnittebene nur durch vier Kantenmittelpunkte verläuft und ein Mittenquadrat als Schnittfläche ausschneidet, wird der Würfel in zwei zueinander kongruente quadratische Säulen zerlegt, die nicht nur Spiegelbilder sondern auch Drehbilder voneinander sind. Findet alle Drehachsen des Würfels, die die beiden Hälften ineinander überführen.

Diese Aufgabe sollten wir auch an den übrigen drei Halbierungen versuchen, in Abb. 14.2 läuft der Schnitt durch vier Ecken (Rechtecksschnitt), in Abb. 14.3 durch zwei Ecken und zwei Kanten mitten (Rhombenschnitt) und in Abb. 14.4 durch sechs Kantenmitten (Reguläres Sechseck als Schnittfläche).
Besonders interessant scheint der rhombische Schnitt (Abb. 14.3) zu sein, auf ihn wollen wir uns hier beschränken. Zunächst zum Begriff **Rhombus** oder Raute. Ein (konvexes) Viereck ist ein Rhombus, wenn es vier gleichlange Seiten besitzt. Und das ist hier der Fall, denn jede Seite verläuft in gleicher Weise von einer Ecke zu einer Kantenmitte. Jedes Quadrat ist ein Rhombus, aber nicht umgekehrt. Ein Rhombus ist nur dann ein Quadrat, wenn die Innenwinkel Rechte Winkel sind. Das ist hier nicht der Fall, was man schon daran sehen kann, dass die beiden Diagonalen nicht längengleich sind: Die längere Diagonale ist so lang wie eine Raumdiagonale, die kürzere so lang wie eine Flächendiagonale.
Jetzt könnt ihr unseren Schnittrhombus in wahrer Gestalt und Größe zeichnen, die Würfelkante sei 5cm. Messt auch die Innenwinkel des Rhombus.

15 Die Würfelhälfte beim rhombischen Schnitt, Beispiele für Körper aus zwei Würfelhälften

Betrachten wir nun die Würfelhälften je für sich und in ihren Beziehungen zu einander.

In 15.1 ist eine 2-zählige Drehachse des Würfels (blau) eingetragen. Begründet, wieso diese Drehung „hälftentreu“ ist, d.h. bei 180° Drehung die beiden Hälften austauscht.
15.2 soll die Frage anstoßen: Sind die beiden Hälften Spiegelbilder von einander? Ja, wie muss man sie dann aufstellen?
15.3 soll belegen, dass die beiden Hälften durch Verschieben ineinander übergehen können.
Besonders wichtig ist das Flächennetz in 15.4. Es zeigt die Oberfläche einer Hälfte in ihrer wahren Gestalt und Größe. Es sind sechs Flächen, also ist die Würfelhälfte ein Hexaeder genauso wie der Würfel. Erscheint das nicht paradox? Versucht, eine Erklärung zu finden.
In 15.5 und 15.6 sind je zwei Halbwürfel zu konvexen Körpern zusammengebaut, wobei je die beiden Quadrate (rot angedeutet) die Berührfläche darstellen. Beide Körper sind auch wieder Hexaeder (6-Flächner). Erklärung?
Jedoch gibt es große Unterschiede zwischen beiden, die besonders deutlich in Flächennetzen werden. In 15.5 besteht die Oberfläche aus zwei Rhomben, zwei Dreiecken, zwei Trapezen je als Paare deckungsgleich. Im Körper von 15.6 dagegen besteht die Oberfläche aus sechs Parallelogrammen, je zwei gegenüberliegende sind deckungsgleich. Diesen Körper könnten wir „schiefen Quader“ (sogenanntes „Parallelepiped“) nennen. Experimentiert dazu mit einem instabilen Kantenmodell eines Quaders.
Wenn ihr das Kantenmodell eines instabilen Würfels auf gleiche Art „zusammendrückt“, dann erhaltet ihr Hexaeder, deren Oberfläche nur aus Rhomben besteht. Im Falle der Deckungsgleichheit aller sechs Rhomben ergibt sich das Kantenmodell des Rhomboeders.

Ein „feinerer" Unterschied: Der Körper von 15.5 besitzt eine Ecke, in der vier Kanten und vier Flächen zusammenstoßen und er hat „dafür" nur sieben Ecken; der Körper in 15.6 aber hat nur „Dreierecken" und zwar acht.
Mit den Quadraten als Berührungsfläche kann man zwei weitere Körper aus je zwei Halbwürfeln herstellen. Findet sie und beschreibt sie (Flächennetze!)und vergleicht alle vier „Doppelhalbwürfel" miteinander.
Und wie sieht es mit der Symmetrie der beiden aus?
Beide Körper gibt es als Grundformen in der Kristallographie. Sowohl eine Würfelhälfte als auch die beiden Figuren in 15.5 und 15.6 sind Grundformen von Kristallen und kommen in der Natur als Mineralien vor.

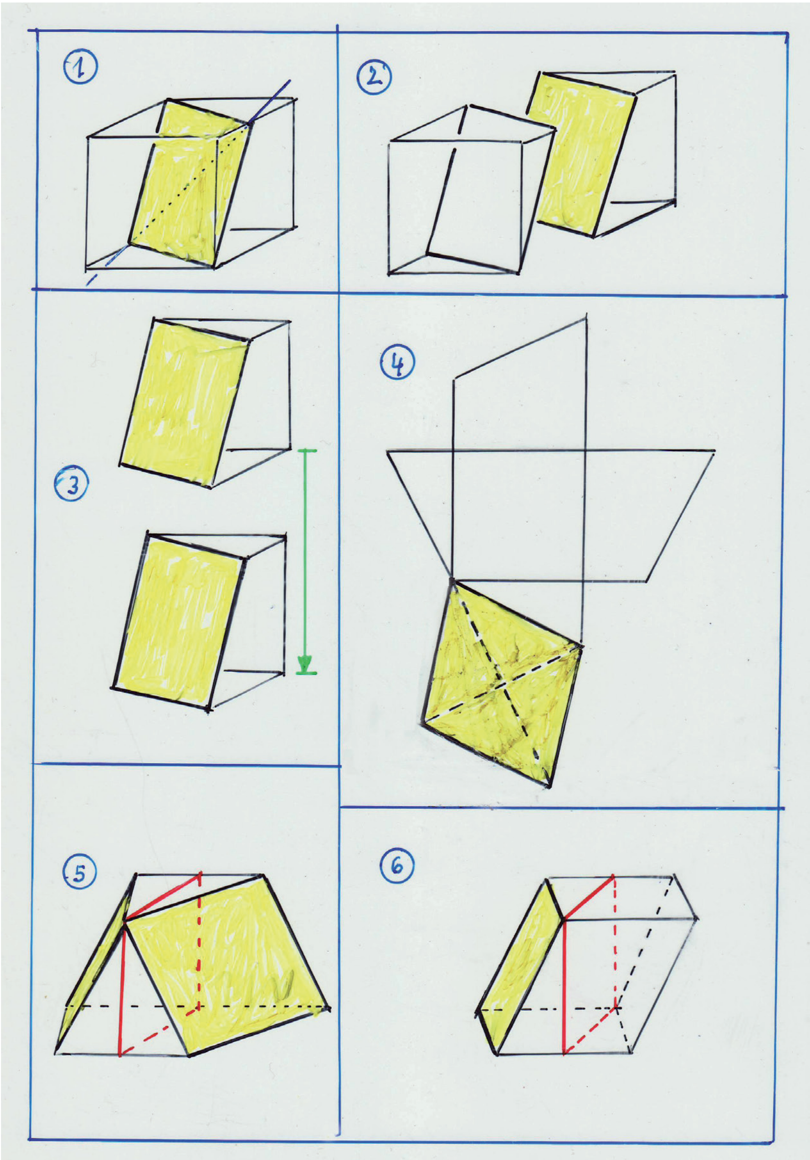


Abb. 15: Die Würfelhälfte beim rhombischen Schnitt, Beispiele für Körper aus zwei Würfelhälften

16 Ein „neuer“ (?) Körper aus 8 rhombischen Würfelhälften

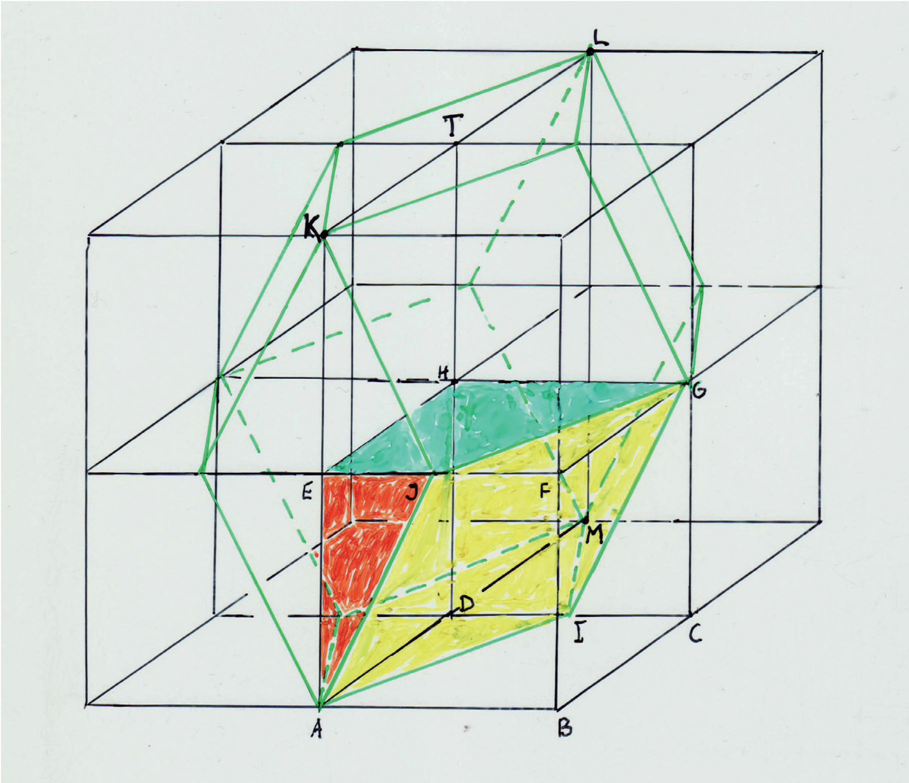


Abb. 16: Konvexer Körper aus 8 rhombischen Würfelhälften

Hantiert man spielend mit mehreren gleichgroßen rhombischen Würfelhälften, so kann man viele interessante Körper bauen. Mein Sohn und ich fanden vor drei Jahren einen in unseren Augen besonders schönen natürlich konvexen Körper aus **acht rhombischen Würfelhälften**. In Abb. 16 ist ein Halbwürfel unten, rechts, vorn farbig ausgezeichnet. Geht man von dem Gitter der acht vollen Würfel aus, so kann man den Körper ganz leicht einzeichnen. Und man kann ihn dann auch beschreiben.
Alle Kanten sind von gleicher Länge, nämlich so lang wie die Strecke von einem Würfeleckpunkt zu einem zugehörigen Kantenmittelpunkt. Wie viele Kanten sind es? Zählt geschickt (24) Und wie viele Ecken? (14) Und wie viele Flächen? (8 + 4 = 12).
Letzteres ist ganz besonders leicht festzustellen; es gibt acht große und vier kleine Rhomben,je paarweise deckungsgleich. Und wieder erinnern wir uns an den Eulerschen Satz.
Die **Drehsymmetrie** des Körpers (8-Würfelhälften -Dodekaeder, kurz: 8WhD) ist aus der Entstehung des 8WdD relativ leicht zu bestimmen, jedenfalls die Drehachsen zu finden. Man beachte dazu die „Fugen“ der Bausteine. Da finden wir wohl zunächst die drei paarweise senkrecht aufeinander stehenden Hauptachsen, die sich im Zentrum H schneiden.
Die waagerechte von links nach rechts verlaufende Achse HG steht senkrecht auf dem Quadrat AMLK, das sich als entscheidend für das Verständnis der Drehsymmetrie erweisen wird, ist eine 4-zählige Drehachse.

Die von vorn nach hinten verlaufende Achse steht senkrecht und mittig auf zwei kleinen Rhomben und erweist sich so als 2-zählige Drehachse.
Ganz analog finden wir, dass die senkechte Achse HT ebenfalls eine 2- zählige Drehachse ist.
Das ist aber noch nicht alles. Ohne die Fugenvorstellung, aber im Bewusstsein, dass jeder Halbwürfel eine Spiegelebene besitzt, können wir herausfinden, dass auch die Geraden AL und IK 2-zählige Drehachsen des 8WhD sind. So haben wir zusammenfassend eine 4-zählige und vier 2-zählige Drehachsen. Letztere liegen im Quadrat AMLK.
Wenn wir uns nun vorstellen, dass die Achsenspiegelungen eines ebenen Quadrats hier im dreidimensionalen als Drehungen (meist Klappungen genannt) angesehen werden können, so wird plausibel, dass die Drehsymmetrie des 8WhD nichts anderes ist als die Drehsymmetrie des **räumlichen Quadrats**, nämlich aus acht Drehungen besteht.
Ist unser 8WhD die Grundform eines Kristalls? Auf den ersten Blick könnte man es vielleicht als Granat ansehen. Das ist aber nicht der Fall, die Form wird viel mehr in die Ditetragonal-dipyramidische Kristallklasse eingestuft. In reinerer Ausprägung ist wohl bisher noch kein entsprechendes Mineral gefunden worden. Die größte Ähnlichkeit hat es nach mündlicher Auskunft des Kristallographischen Instituts der RWTH mit dem seltenen Vesuvian. Obwohl das 8WhD wesentlich weniger Symmetrie besitzt als der Würfel, so hat es doch von ihm eine wichtige Eigenschaft geerbt: Es ist auch ein Raumfüller. Und wenn es auch nur eines von unendlich vielen Dodekaedern ist, die durch „Zusammendrücken“ aus dem klassischen Dodekaeder hervorgehen, so ändert das nichts an seiner schlichten Schönheit.

Einige Literaturhinweise

Zu Fröbel
Hebenstreit, S.(2003): Friedrich Fröbel – Menschenbild, Kindergartenpädagogik, Spielförderung, IKS Garamont Jena, ISBN 3-934601-58-8

Rockstein, M. / Neumann,K., Hrsg.(2009): Fröbels Erbe, Thüringer Landesmuseum Heidecksburg Rudolstadt, ISBN 978-3-310013-76-6

Zur Geometrie der Polyeder
Adam, P. / Wyss, A. (1984): Platonische und Archimedische Körper, Verlag Freies Geistesleben Stuttgart, ISBN 3-7725-0965-7

Bender, P. / Schreiber / A. (1985):Operative Genese der Geometrie, Hölder-Pichler-Tempsky Wien, Teubner Stuttgart, ISBN 3-519-02790-9

Müller, K.P. (1983): Körperpackungen und Raumvorstellungen, in: Der Mathematikunterricht, -Heft 6, S. 56-82

Steinhaus, H. (1957): Kaleidoskop der Mathematik, Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

Toepell, M. (1991): Platonische Körper in Antike und Neuzeit, in: Der Mathematikunterricht, Heft 4, S. 45-79

Winter, H.W. (1968): Der Würfel in Grund- und Hauptschule. In: Neue Wege zur Unterrichtsgestaltung, Heft 3, S. 97-123; Kampsverlag, Bochum

Zur Symmetrie und Gruppentheorie
Alexandroff, P.S. (1971): Einführung in die Gruppentheorie, Deutscher Verlag der Wissenschaften

Besuden, H. (1984): Knoten, Würfel, Ornamente, Klett Verlag Stuttgart, ISBN 3-12-186160-3

Weyl, H. (1955): Symmetrie, Birkenhäuser Verlag, Basel-Stuttgart

Winter, H. (2010): Symmetrien des Würfels – auch gruppenweise, in Mathematik Lehren, Heft 161

Zur Kristallographie
Bohm, J. (1975) Kristalle, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

Kleber, W. / Bautsch, H.J. / Bohm, J. (1998) Einführung in die Kristallographie, Verlag Technik Berlin, ISBN 3-341-01205-2

Kleines Glossar

Reguläres Vieleck. (= reguläres Polygon) Jedes ebene Vieleck, das gleichlange Seiten und gleich große Innenwinkel hat, heißt *reguläres* (regelmäßiges) *Vieleck*.
Beispiele: Gleichseitiges Dreieck, Quadrat.

Platonischer Körper. Jeder konvexe Körper, an dessen Ecken die gleiche Anzahl deckungsgleicher (kongruenter) regulärer Vielecke zusammenstoßen heißt *Platonischer Körper* (regulärer Körper). Es gibt diese fünf: Tetraeder, Hexaeder (Würfel), Oktaeder, Dedekaeder, Isokaeder

Polyeder. Unter einem (dreidimensionalen) *Polyeder*, auch Vielflächner genannt, versteht man einen Teil des dreidimensionalen Raumes, der ausschließlich von Ebenen begrenzt wird.

Konvexes Polyeder. Ein Polyeder nennt man *konvex*, wenn es auf jede Seitenfläche gelegt werden kann.

Konvexes Vieleck. Ein ebenes Vieleck nennt man *konvex*, wenn es (etwa aus Pappe ausgeschnitten) auf jede seiner Seiten gestellt werden kann.

Rhombus oder **Raute.** Ein konvexes Viereck heißt *Rhombus*, wenn es vier gleichlange Seiten besitzt.

Partner des Programms *SINUS an Grundschulen*

Programmträger: IPN, Kiel
Projektleitung: Prof. Dr. Olaf Köller
www.ipn.uni-kiel.de

SINUS an Grundschulen
Projektkoordination am IPN: Dr. Claudia Fischer
Tel. +49(0)431/880-3136
cfischer@ipn.uni-kiel.de
www.sinus-an-grundschulen.de

SINUS an Grundschulen
Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

Ministerium
für Bildung und Kultur
des Landes Schleswig-Holstein

Programmkoordination für die Länder durch das
Ministerium für Bildung und Kultur
des Landes Schleswig-Holstein (MBK)
Dr. Kai Niemann
www.schleswig-holstein.de/MBK/DE/MBK_node.html

Serverbetreuung: Deutsches Institut für Internationale
Pädagogische Forschung (DIPF)
www.dipf.de

ISBN für diese Handreichung
978-3-89088-220-8