technische universität dortmund

Mathematisches Denken hört nicht beim Ergebnis auf

# Mathematische Strukturen entdecken, darstellen und erörtern

ein Thema für alle Kinder von Anfang an

Marcus Nührenbörger

PROGRAMM SINUS - Transfer

# Mathematische Strukturen entdecken, darstellen und erörtern

## Eine Aufgabe, ein Ergebnis $15 + 9$

zum Berechnen der Ergebnisse $15 + 9 = 24$

zum Erkunden der Beziehungen

$$15 + 9 = 20 + 4 = 15 + 5 + 4$$
$$= 25 - 1 = 15 + 10 - 1$$
$$= 8 \cdot 3 = 5 \cdot 3 + 3 \cdot 3$$

---

$48 + 1$ $\quad 7 \cdot 7$

*Es kommt das Gleiche heraus* $= 49$

*Sie stehen in Beziehung zueinander*

$$48 + 1 = (8 \cdot 6) + 1$$
$$= (7 \cdot 6 + 6) + 1$$
$$= (7 \cdot 6) + (6 + 1)$$
$$= (7 \cdot 6) + (7 \cdot 1)$$
$$= 7 \cdot 7$$

# Mathematische Strukturen entdecken, darstellen und erörtern

## Eine Aufgabe: **Additionstabellen**


| + | 17 | 12 | 31 |
|---|---|---|---|
| 45 | 62 | 57 | 76 |
| 19 | 36 | 31 | 50 |
| 8 | 25 | 20 | 39 |

### Aufgaben zum Rechnen

45+17 = 62
45+12 = 57
45+31 = 76

19+17 = 36
19+12 = 31
19+31 = 50

8+17 = 76
8+12 = 50
8+31 = 39

### Aufgaben zum Deuten:
Betrachten Sie die Ergebnisse

# **Eine Aufgabe:** Additionstabellen

| + | 17 | 12 | 31 |
|---|---|---|---|
| 45 | | | |
| 19 | | | |
| 8 | | | |

Strukturelle Zusammenhänge in der Tabelle: Vergleiche **Zahlen** in der Tabelle

**Was fällt auf?**

- 5 → + 19 →

| + | 17 | 12 | 31 |
|---|---|---|---|
| 45 | 62 | 57 | 76 |
| 19 | 36 | 31 | 50 |
| 8 | 25 | 20 | 39 |

- 26 ↓

- 11 ↓

nebeneinander stehende Zahlen

Warum sind die (Unterschiede zwischen den) Zahlen gleich?

**17** + 45 = 62 $\xrightarrow{62 - 5 = 57}$ 57 = **12** + 45

**17** + 19 = 36 $\xrightarrow{36 - 5 = 31}$ 31 = **12** + 19

**17** + 8 = 25 $\xrightarrow{25 - 5 = 20}$ 20 = **12** + 8

Das gleiche Ergebnis (algorithm. Sicht): Es kommt das gleiche raus!

Ähnliche Beziehungen (algebraische Sicht): Die Abstände sind jeweils gleich

# **Eine Aufgabe:** Additionstabellen

| + | 17 | 12 | 31 |
|---|---|---|---|
| 45 | | | |
| 19 | | | |
| 8 | | | |

Strukturelle Zusammenhänge in der Tabelle: Vergleiche **Zahlen** in der Tabelle

**Was fällt auf?**

$\xrightarrow{-\,5}$ $\xrightarrow{+\,19}$

| + | 17 | 12 | 31 |
|---|---|---|---|
| 45 | 62 | 57 | 76 |
| 19 | 36 | 31 | 50 |
| 8 | 25 | 20 | 39 |

$\downarrow$ - 26

$\downarrow$ - 11

untereinander stehende Zahlen

Warum sind die (Unterschiede zwischen den) Zahlen gleich?

17 + **45** = 62 $\xrightarrow{62\ -\ 26\ =\ 36}$ 36 = 17 + **19**

12 + **45** = 57 $\xrightarrow{57\ -\ 26\ =\ 31}$ 31 = 12 + **19**

31 + **45** = 76 $\xrightarrow{76\ -\ 26\ =\ 50}$ 50 = 31 + **19**

# **Eine Aufgabe:** Additionstabellen

| + | 17 | 12 | 31 |
|---|---|---|---|
| 45 | | | |
| 19 | | | |
| 8 | | | |

Strukturelle Zusammenhänge in der Tabelle: Vergleiche **Summen** von Zahlen

**Was fällt auf?**

- 5 → + 19 →

| + | 17 | 12 | 31 |
|---|---|---|---|
| 45 | 62 | 57 | 76 |
| 19 | 36 | 31 | 50 |
| 8 | 25 | 20 | 39 |

- 26 ↓

- 11 ↓

Warum sind die Summen gleich?

Das gleiche Ergebnis (algorithm. Sicht)

Ähnliche Beziehungen (algebraische Sicht)

Addiere Zahlen in einer Zeile:

62 + 57 = 119      133 = 57 + 76

- 2 · 26

36 + 31 = 67      81 = 31 + 50

Addiere Zahlen in den Diagonalen:

62 + 31 + 39 = 132

- 26 - 11      + 26 + 11      =

25 + 31 + 76 = 132

# **Eine Aufgabe:** Additionstabellen

| + | 17 | 12 | 31 |
|---|---|---|---|
| 45 | | | |
| 19 | | | |
| 8 | | | |

Strukturelle Zusammenhänge in der Tabelle: Vergleiche **Summen** von Zahlen

**Was fällt auf?**

- 5 → + 19 →

| + | 17 | 12 | 31 |
|---|---|---|---|
| 45 | 62 | 57 | 76 |
| 19 | 36 | 31 | 50 |
| 8 | 25 | 20 | 39 |

- 26 ↓

- 11 ↓

62 = 17 + 45

39 = 31 + 8

31 = 12 + 19

31 = 12 + 19

25 = 17 + 8

76 = 31 + 45

Addiere Zahlen in den Diagonalen:

62 + 31 + 39 = 132

- 26 - 11 ↓ ↑ - 26 - 11

25 + 31 + 76 = 132

62 + 31 + 39 = 17 + 45 + 12 + 19 + 31 + 8

=

25 + 31 + 76 = 17 + 8 + 12 + 19 + 31 + 45

**Eine Aufgabe:** Streichquadrate
**ein Ergebnis - viele Beziehungen**

Warum kommt immer das Gleiche heraus?

Kern: Die Erkundung mathematischer Beziehungen

**„Streichregel“**

1. Kreise eine der Zahlen ein und streiche alle Zahlen in der selben Zeile & Spalte
2. Fahre so fort, bis alle Zahlen eingekreist oder gestrichen sind
3. Addiere die eingekreisten Zahlen

| + | 17 | 12 | 31 |
|---|---|---|---|
| 45 | 62 | 57 | 76 |
| 19 | 36 | 31 | 50 |
| 8 | 25 | 20 | 39 |

62 + 50 + 20 = 132

| | | |
|---|---|---|
| 62 | 57 | 76 |
| 36 | 31 | 50 |
| 25 | 20 | 39 |

76 + 36 + 20 = 132

132 = 17 + 12 + 31 + 45 + 19 + 8

**Eine Aufgabe:** Streichquadrate
# ein Ergebnis - viele Beziehungen

Warum kommt immer das Gleiche heraus?

Kern: Die Erkundung mathematischer Beziehungen

**Etappenweises Vorgehen:**

1. Etappe: Kennenlernen der Aufgabenvorschrift

2. Etappe: Strukturelle Beziehungen entdecken

3. Etappe: Beziehungen beschreiben und begründen

4. Etappe: Beziehungen nutzen zum Problemlösen

1. Stunde:

Einführung und Festigung der Streichregel

Streichquadrat: Streichsumme Streichzahl

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 31 | 14 |
| 17 | 18 | 9 |
| 10 | 22 | 11 |

○ + ○ + ○ = ☐

Gibt es eine größte, eine kleinste Streichsumme?

Streichquadrat: Streichsumme Streichzahl

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 31 | 14 |
| 17 | 18 | 9 |
| 10 | 22 | 11 |

○ + ○ + ○ = ☐

# **Eine Aufgabe:** Streichquadrate
# **ein Ergebnis - viele Beziehungen**

Kern: Die Erkundung mathematischer Beziehungen

**Etappenweises Vorgehen:**

1. Etappe: Kennenlernen der Aufgabenvorschrift
2. Etappe: Strukturelle Beziehungen entdecken
3. Etappe: Beziehungen beschreiben und begründen
4. Etappe: Beziehungen nutzen zum Problemlösen

| | | |
|---|---|---|
| ● | 31 | 14 |
| 17 | ● | 9 |
| 10 | 22 | ● |

| | | |
|---|---|---|
| ● | 31 | 14 |
| 17 | 18 | ● |
| 10 | ● | 11 |

| | | |
|---|---|---|
| 12 | ● | 14 |
| ● | 18 | 9 |
| 10 | 22 | ● |

| | | |
|---|---|---|
| 12 | ● | 14 |
| 17 | 18 | ● |
| ● | 22 | 11 |

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 31 | ● |
| 17 | ● | 9 |
| ● | 22 | 11 |

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 31 | ● |
| ● | 18 | 9 |
| 10 | ● | 11 |

## Warum kommt immer das Gleiche heraus?

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 31 | 14 |
| 17 | 18 | 9 |
| 10 | 22 | 11 |

1. Stunde:

Einführung und Festigung der Streichregel

Wie viele Streichsummen gibt es?

3 x 2 Möglichkeiten!

# **Eine Aufgabe:** Streichquadrate
# **ein Ergebnis - viele Beziehungen**

Warum kommt immer das Gleiche heraus?

Kern: Die Erkundung mathematischer Beziehungen

**Etappenweises Vorgehen:**

1. Etappe: Kennenlernen der Aufgabenvorschrift

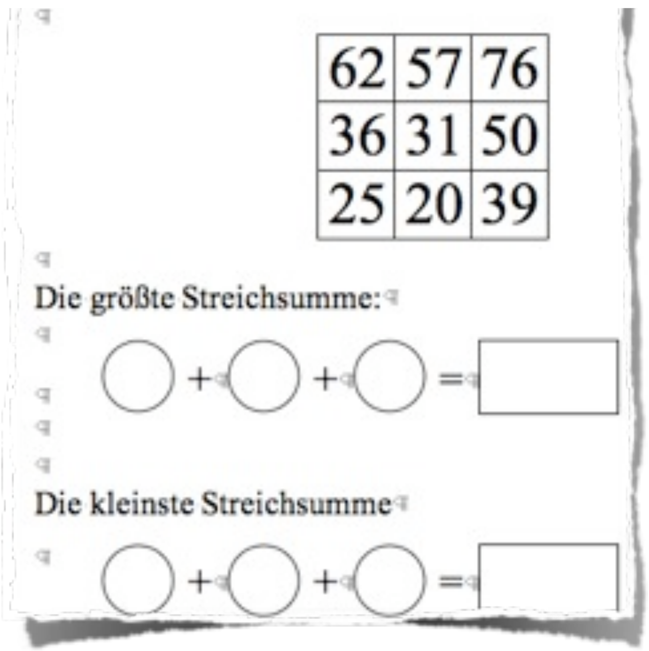
2. Etappe: Strukturelle Beziehungen entdecken

3. Etappe: Beziehungen beschreiben und begründen

4. Etappe: Beziehungen nutzen zum Problemlösen

2. Stunde:

Konstanz der Streichsumme



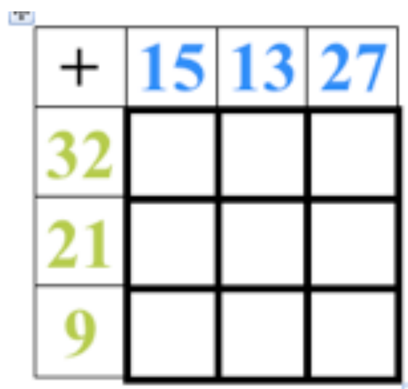
| | | |
|---|---|---|
| 62 | 57 | 76 |
| 36 | 31 | 50 |
| 25 | 20 | 39 |

Die größte Streichsumme:

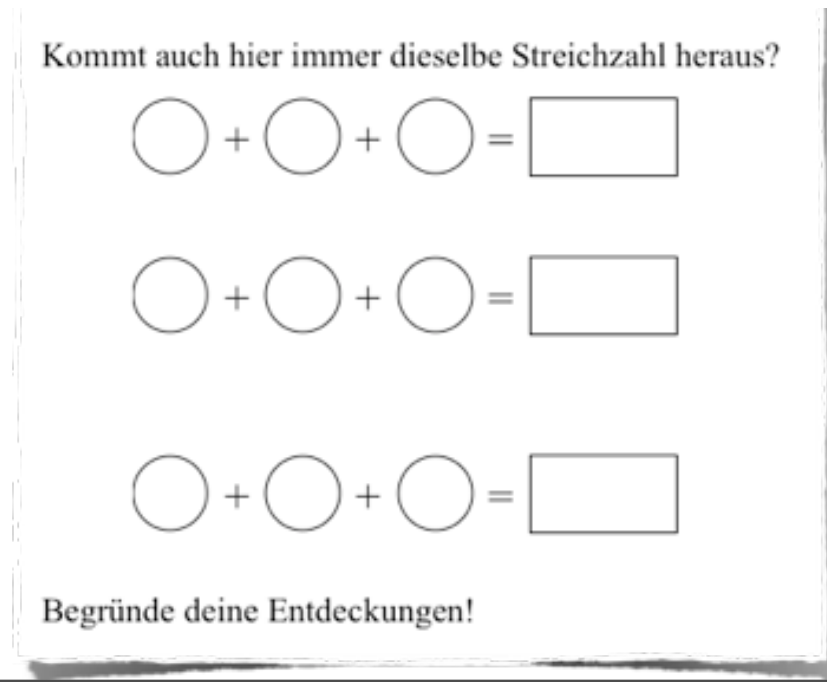
○ + ○ + ○ = ☐

Die kleinste Streichsumme

○ + ○ + ○ = ☐



| + | 15 | 13 | 27 |
|---|---|---|---|
| 32 | | | |
| 21 | | | |
| 9 | | | |



Kommt auch hier immer dieselbe Streichzahl heraus?

○ + ○ + ○ = ☐

○ + ○ + ○ = ☐

○ + ○ + ○ = ☐

Begründe deine Entdeckungen!

# **Eine Aufgabe:** Streichquadrate **ein Ergebnis - viele Beziehungen**

Warum kommt immer das Gleiche heraus?

Kern: Die Erkundung mathematischer Beziehungen

**Etappenweises Vorgehen:**

1. Etappe: Kennenlernen der Aufgabenvorschrift
2. Etappe: Strukturelle Beziehungen entdecken
3. Etappe: Beziehungen beschreiben und begründen
4. Etappe: Beziehungen nutzen zum Problemlösen

3. Stunde:

Streichquadrate herstellen

1. Möglichkeit:
Streichquadrate vervollständigen

| | | |
|---|---|---|
| 62 | 57 | 76 |
| 36 | 31 | |
| 25 | 20 | 39 |

62 + 31 + 39

= 62 + 20 +

2. Möglichkeit:
Streichquadrate reparieren

| | | |
|---|---|---|
| 62 | 57 | 76 |
| 36 | 31 | 50 |
| 25 | 20 | 39 |

3. Möglichkeit:
Streichquadrate herstellen

| | | |
|---|---|---|
| 62 | 57 | 76 |
| 36 | 31 | 50 |
| 25 | 20 | 39 |

Finde ein Streichquadrat mit der Streichsumme 100

Finde (alle) passende(n) Randzahlen

Vergrößere die Streichsumme um 1

...

# Eine Aufgabe
# ein Ergebnis - viele Beziehungen

Warum kommt immer das Gleiche heraus?

Kern: Die Erkundung mathematischer Beziehungen

„Die Aufgabe-Ergebnis-Deutung kann bereits im Bereich der Standardaufgaben nicht als optimal erkenntnisfördernd angesehen werden, da nur durch eine Algebraisierung des Rechnens eine Steigerung der arithmetischen Kompetenzen der Schüler und somit eine Verbesserung ihres begründeten und findigen Verhaltens erfolgen kann.... Die algebraische Sicht stellt einen höheren Lernanspruch dar, als die pure Aufgabe-Ergebnis-Deutung, aber sie verspricht auch höheren Lohn“ (Winter 1982)

**Mathematische Strukturen**
entdecken, darstellen und **erörtern**

Individuelle Förderung
Interaktives Lernen

Kern: Die Erkundung mathematischer Beziehungen

Paradoxie individueller Förderung einsichtsvollen Mathematiklernens

individuell ⟷ kollektiv

Kinder entwickeln mathematisches Wissen (weiter)

- in Kooperation
- in Kommunikation mit anderen

„Nur in der sozialen Gruppe und aufgrund der sozialen Interaktionsprozesse zwischen den Mitgliedern einer Gruppe kann das einzelne Individuum jene Erfahrungen machen, die fundamentale Lernschritte ermöglichen" (Miller 1986, 216).

**Mathematische Strukturen**
entdecken, darstellen und **erörtern**

Individuelle Förderung
Interaktives Lernen

Kern: Die Erkundung mathematischer Beziehungen

> „Als Konsequenz für Lehr-Lern-Arrangements liegt es nahe, dass Lehren je individuell auf der Basis des bislang \`Begriffenen´ am Subjekt des Lernenden ansetzen und gleichzeitig insbesondere Interaktion unter den Lernenden und zwischen Lernenden und Lehrenden ermöglichen muss“ (Bräu 2005, 133).

**substantielle Aufgabenformate / Aufgabensysteme**

gleiches, ganzheitliches Grundlernangebot (z.B. Steinbring 1988, Wittmann 1995, 1998)

- Flexible Niveaudifferenzierung
- Angebot an reichhaltigen math. Aktivitäten
- Repräsentation fundamentaler math. Ideen und Beziehungen i.S. des operativen Prinzips
- Parallelisierung produktiver Übungen (Nutzung mathematischer Analogien) i.S. des Spiralprinzips

# Gemeinsame Aufgaben im jahrgangsgemischten Unterricht

## Individuelle Förderung
## Interaktives Lernen

Kern: Die Erkundung mathematischer (Beziehungen) **analogen** Beziehungen, die differenziert in der **Vorausschau** erfahren und in der **Rückschau** reflektiert werden können.

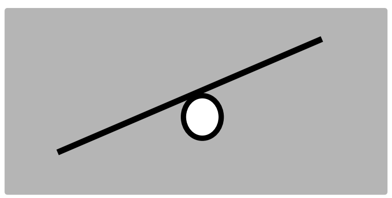
(1) *aktiv-entdeckendes und sozial-kommunikatives Mathematiklernen*

(2) *beziehungsreiches mathematisches Wissen*

(3) *Diskurse über benachbarte Einschulungsjahrgänge hinweg*

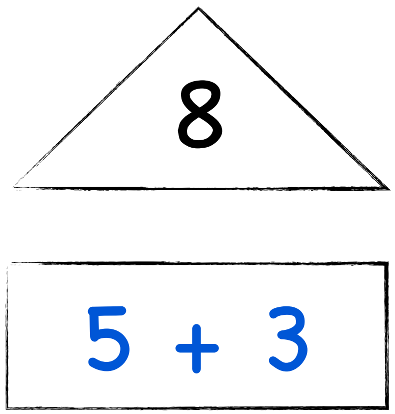
Ein Beispiel:

erwin & SÖNKE arbeiten an Zahlenhäusern



Partnerarbeit:

Wippe




S Wer fängt an, du ähm? Acht plus null

e Nee, ich mach füüünf *(notiert „5“)*

S Kannst auch was anderes machen.

e plus, fünf plus (. .) drei *(notiert „+ 3“)*

S Fünf plus drei *(schiebt den Streifen unter die Dachzahl, lässt dabei eine Lücke).*

**Gemeinsame Aufgaben im jahrgangsgemischten Unterricht**

Individuelle Förderung
Interaktives Lernen

Kern: Die Erkundung mathematischer (**analoger**) Beziehungen, die differenziert in der **Vorausschau** erfahren und in der **Rückschau** reflektiert werden können.

(1) *aktiv-entdeckendes und sozial-kommunikatives Mathematiklernen*

(2) *beziehungsreiches mathematisches Wissen*

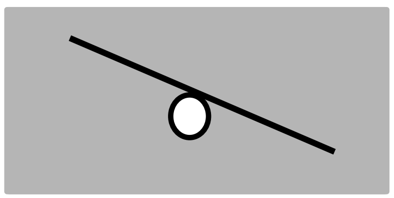
(3) *Diskurse über benachbarte Einschulungsjahrgänge hinweg*

Ein Beispiel:

erwin & SÖNKE arbeiten an Zahlenhäusern

8

8 + 0 | 5 + 3



Partnerarbeit:

Wippe

e Acht plus null kann man auch machen.

S Acht plus null *(notiert „8 + 0“)*.

So, das ist dann die erste Aufgabe.

Deine ist irgendwo hier *(schiebt 8+0 nach oben, 5+3 etwas nach unten)*

**Gemeinsame Aufgaben im jahrgangsgemischten Unterricht**

Individuelle Förderung
Interaktives Lernen

Kern: Die Erkundung mathematischer (**analoger**) Beziehungen, die differenziert in der **Vorausschau** erfahren und in der **Rückschau** reflektiert werden können.

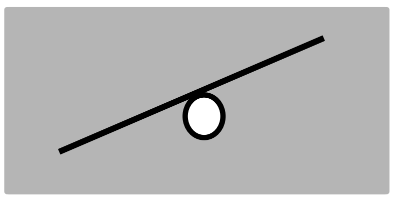
(1) *aktiv-entdeckendes und sozial-kommunikatives Mathematiklernen*

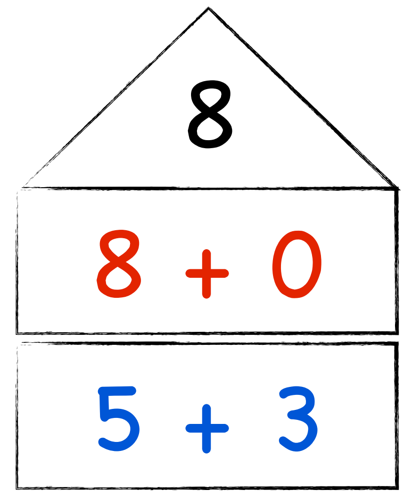
(2) *beziehungsreiches mathematisches Wissen*

(3) *Diskurse über benachbarte Einschulungsjahrgänge hinweg*

Ein Beispiel:

erwin & SÖNKE arbeiten an Zahlenhäusern






S Jetzt bist du wieder dran

Mach irgendeine, die ich wir hier noch nicht stehen. Kannst auch vier plus vier machen, welche du willst.

e Aha, vier plus vier. *(notiert „4 + 4“)*

4 + 4

# Gemeinsame Aufgaben im jahrgangsgemischten Unterricht



Kern: Die Erkundung mathematischer (**analoger**) Beziehungen, die differenziert in der **Vorausschau** erfahren und in der **Rückschau** reflektiert werden können.

Fokus auf die **Aushandlung von Beziehungsgleichheiten**

- Erwin deutet erste strukturelle Beziehungen zwischen verschiedenen Aufgaben
- SÖNKE konstruiert auf neue Weise Beziehungen zwischen dem alten Wissen um die Anzahl an Zerlegungen für eine Zahl und der Idee einer hierarchischen Anordnung der Zerlegungen und artikuliert diese

# Gemeinsame Aufgaben im jahrgangsgemischten Unterricht

Rückblick

Wie hat Sönke die Aufgabe im Jahr zuvor (eine „Generation“ früher) bearbeitet?

| 8 |
|---|
| 8 + 0 |
| 7 + 1 |
| 6 + 2 |
| 5 + 3 |
| 4 + 4 |
| 3 + 5 |
| 2 + 6 |
| 1 + 7 |
| 0 + 8 |

erwin & SÖNKE

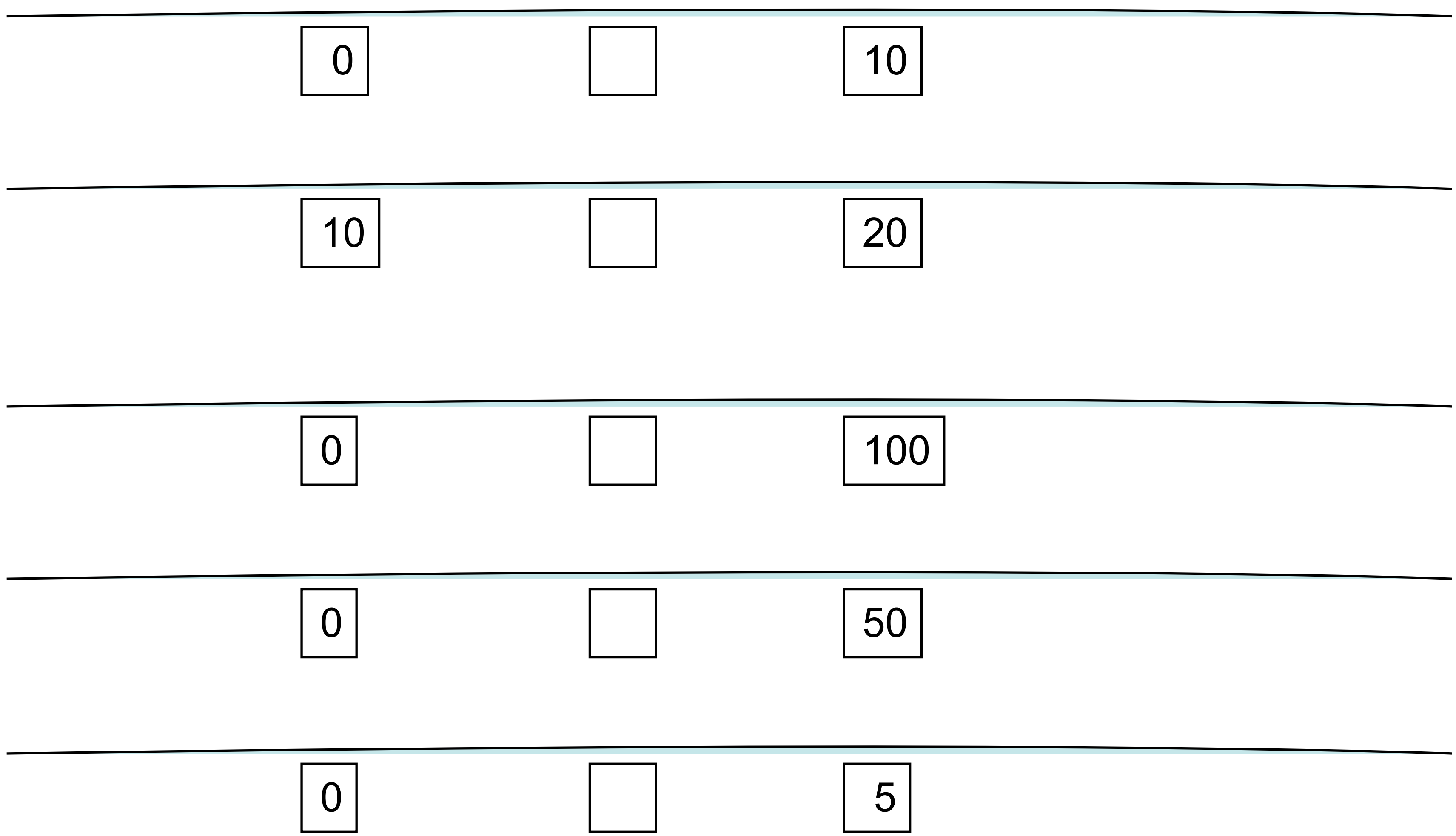
| *soziale Strukturen* | *math. Strukturen* |
|---|---|
| SÖNKE steuert aktiv die kooperative Auseinander-setzung mit der Aufgaben-stellung | SÖNKE bringt sein Wissen um strukturelle Beziehungen auf neue Weise ein |
| Welche Rolle nimmt sönke als jahrgangs-jüngerer Schüler in der Partnerarbeit ein? | Inwiefern deutet sönke die Aufgabenstellung und erkennt erste strukturelle Zusammenhänge? |

| 8 |
|---|
| 4 + 4 |
| 1 + 7 |
| 7 + 1 |
| 6 + 2 |
| 2 + 6 |
| 5 + 3 |
| 3 + 5 |
| 4 + 4 |

KLAUS & sönke

# **Mathematische Strukturen**
entdecken, darstellen und erörtern - **von Anfang an**

## Anschauungsmittel mehrdeutig nutzen




Zahlen finden, legen ...

# Mathematische Strukturen
entdecken, darstellen und erörtern - **von Anfang an**

Beispiele

## Streifen ordnen

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |

Finde weitere passende Zählfolgen

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

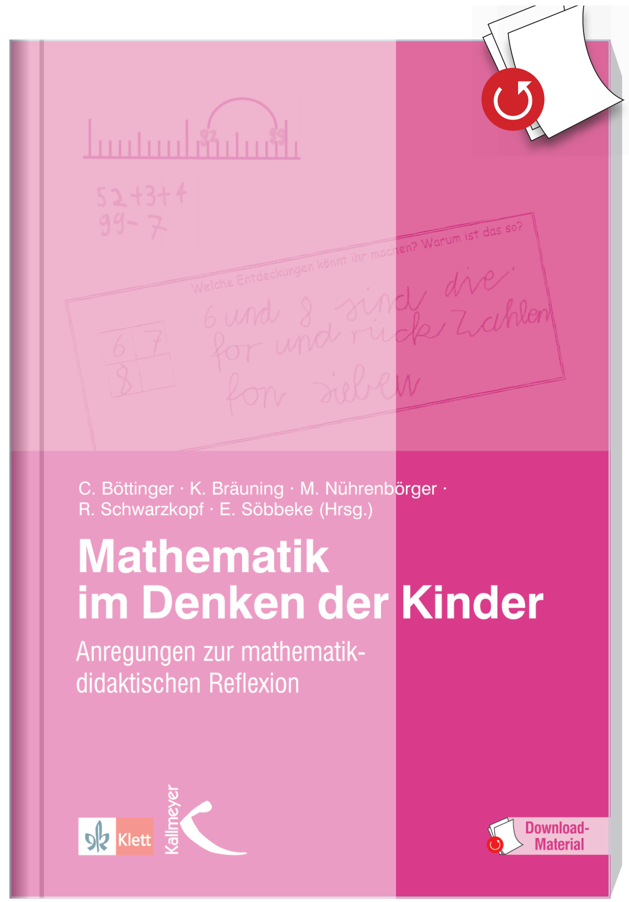
Lernumgebung „Streichquadrate“

Lernumgebung „Zahlenhäuser“

Lernumgebung „Rechenstrich“

Lernumgebung „Zahlenstreifen“

## Literatur und zahlreiche Aufgabenformate

Lernumgebung „Zahlentafeln“

Lernumgebung „Häuser zum Rechnen“

Lernumgebung „Kraft der 5“

Lernumgebung „Passende Aufgaben“

**Vorschläge für die Diskussion:**

Bearbeiten Sie die Aufgabenblätter.

Suchen Sie nach verschiedenen Möglichkeiten (auch nach Wegen, die Ihrer Meinung nach nicht intendiert sind), wie die Kinder die Aufgaben bearbeiten könnten.

nach verschiedenen Möglichkeiten der Sortierung

nach verschiedenen Regelmäßigkeiten, die Kinder hier sehen könnten

1) Welche Beziehungen könnten Kinder entdecken, beschreiben, begründen? Wie könnten die Beschreibungen / Begründungen aussehen?

2) Welche Anregungen sehen Sie für differenzierte Zugänge - auch im jahrgangsgemischten Unterricht? Welche Anpassungen müssten evtl. noch vorgenommen werden?

3) Wie kann man die Lernumgebung als „Wippe“ oder als „Weggabelung“ gestalten?

4) Welche Chancen und Schwierigkeiten sehen Sie für die Umsetzung des Aufgabenformats?